Aufgabe 13: Boolesche Matrixmultiplikation und Transitive Hülle (II)

Das ist eine Fortsetzung deer Aufgabe 12. sie zeigt, dass man die Berechnung der trasitiven Hülle noch effizienter machen kann, wenn man eine Divide-and-Conquer-Idee verwendet. Dazu sei (der Einfachheit halber, die Einschränkung ist unwesentlich) $n = \sharp V$ gerade, also $n = 2m$. Die Matrix A_G wird in vier $(m \times m)$-Teilmatrizen zerlegt:

$$A_G = \begin{bmatrix} U & V \\ W & X \end{bmatrix}$$

Dabei ist U die Adjazenzmatrix eines Graphen G_U, der Einschränkung von G auf die Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, m\}$, und X die Adjazenzmatrix eines Graphen G_X, der Einschränkung von G auf die Knotenmenge $\{m+1, m+2, \ldots, 2m\}$.

1. Nehmen Sie an, Sie kennen bereits die Matrix $X^* := A_{G_X^*}$ der transitiven Hülle von G_X. Definieren Sie die boolesche Matrix

   $$Y = U \vee (V \cdot X^* \cdot W) = [\, y_{i,j} \,]_{1 \le i,j \le m} \,.$$

   Beschreiben Sie die graphentheoretische Bedeutung von Y, d.h. interpretieren Sie Y als die Adjazenzmatrix eines Graphen G_Y mit Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, m\}$. Wann ist $y_{i,j} = 1$ und wann ist $y_{i,j} = 0$?

2. Betrachten Sie nun die transitive Hülle G_Y^* von G_Y und deren Adjazenzmatrix $Y^* := A_{G_Y^*}$. Beschreiben Sie die graphentheoretische Bedeutung von Y^*.

3. Bilden Sie nun die folgenden vier booleschen $(m \times m)$-Matrizen

   $$\begin{aligned} U' &= Y^* \\ V' &= Y^* \cdot V \cdot X^* \\ W' &= X^* \cdot W \cdot Y^* \\ X' &= X^* \vee (X^* \cdot W \cdot Y^* \cdot V \cdot X^*) \end{aligned}$$

   und zeigen Sie, dass

   $$A_{G^*} = \begin{bmatrix} U' & V' \\ W' & X' \end{bmatrix}$$

   gilt. Auch hierfür gilt: orientieren Sie sich an der graphentheoretischen Bedeutung dieser Matrizen! Sie codieren Information über Pfade mit gewissen Eigenschaften. Wenn Sie das beachten, ist es ganz einfach.

4. Verwenden Sie die Aussagen der vorigen Punkte, um einen rekursiven Divide-and-Conquer-Algorithmus TransitiveHull für die Berechnung der transitiven Hülle zu formulieren, der die Berechnung von TransitiveHull(G) für einen Graphen mit $n = 2m$ Knoten auf die Berechnung von TransitiveHull(G_1) und TransitiveHull(G_1) für Graphen G_1, G_2 mit halber Knotenzahl m zurückführt. Wieviele boolesche Multiplikationen von $(m \times m)$-Matrizen und wieviele boolesche Additionen von $(m \times m)$-Matrizen werden als *overhead* benötigt?

5. Der Aufwand für den im vorigen Punkt beschriebenen Algorithmus lässt sich in einer Rekursionsgleichung

$$T(2n) = 2\,T(n) + c \cdot n^s$$

abschätzen, wobei der Aufwand für die boolsche Matrixmiultiplikation von zwei $(n \times n)$-Matrizen $\mathcal{O}(n^s)$ ist. Dabei wird $2 \leq s \leq 3$ sein. Was folgt daraus für das Verhalten von $T(n)$.

6. Fazit (vielleicht etwas überraschend): im asymptotischen Verhalten ist die Komplexität für die Berechnung der transitiven Hülle nicht grösser als die für das Multiplizieren! Es gilt aber auch die Umkehrung:

   Seien A und B zwei boolesche $(n \times n)$-Matrizen. Dann kann man das boolesche Matrixprodukt $A \cdot B$ mittels Berechnung einer transitiven Hülle für eine $(3n \times 3n)$-Matrix berechnen. Zeigen Sie

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} I & A & A \cdot B \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

   wobei die I $(n \times n)$-Einheitsmatrizen sind, die 0 $(n \times n)$-Nullmatrizen, und die Matrix links ist die transitive Hülle der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$