

Aufgabe 4: Eingeschränkte Kanäle

Das Szenario zu dieser Aufgabe ist im Problem 2.4 beschrieben.¹

Es sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ das zweielementige Alphabet. Ein Wort $w \in \mathbb{B}^+$ hat einen Faktor $v \in \mathbb{B}^+$, wenn es Wörter $x, y \in \mathbb{B}^*$ gibt mit $w = x \cdot v \cdot y$

Über dem Alphabet \mathbb{B} werden die folgenden Sprachen betrachtet:

- Die Sprache L besteht aus allen Wörtern $w \in \mathbb{B}^*$, in denen $v = 11$ nicht als Faktor vorkommt. Ein typisches Wort in L ist beispielsweise 00100101001010100010.
- Die Sprache K besteht aus allen Wörtern, in denen $w \in \mathbb{B}^*$, in denen $u = 010$ und $v = 101$ nicht als Faktoren vorkommen. Ein typisches Wort in L ist beispielsweise 00111001110011000011.
- Die Sprache M besteht aus allen Wörtern, in denen $w \in \mathbb{B}^*$, in denen $u = 000$ und $v = 111$ nicht als Faktoren vorkommen. Ein typisches Wort in L ist beispielsweise 10010011011001101001.

Aufgaben:

1. Geben Sie für jede der Sprachen K, L, M einen regulären Ausdruck an.
2. Konstruieren Sie für jede der drei Sprachen K, L, M einen endlichen deterministischen Automaten, der diese Sprache akzeptiert.
3. Verwenden Sie Trellis-Diagramme für diese Automaten, um herauszufinden, wieviele Wörter gegebener Länge n jede dieser Sprachen enthält. Sei also $k_n = \#(K \cap \mathbb{B}^n)$, $\ell_n = \#(L \cap \mathbb{B}^n)$, $m_n = \#(M \cap \mathbb{B}^n)$, so bestimmen Sie $(k_n)_{0 \leq n \leq 8}$, $(\ell_n)_{0 \leq n \leq 8}$, $(m_n)_{0 \leq n \leq 8}$.
4. Vergleichen Sie die numerische Resultate. Was fällt Ihnen auf? Haben Sie eine Erklärung dafür?
5. Geben Sie zu jedem der drei endlichen deterministischen Automaten die Transitionsmatrix an, die für jedes Paar (i, j) von Zuständen angibt, wieviele der Inputsymbole $\in \mathbb{B}$ eine Transition von i nach j bewirken. Berechnen Sie das charakteristische Polynom zu jeder dieser Matrizen und bestimmen Sie die Eigenwerte, insbesondere den (dem Betrag nach) grössten Eigenwert.²

¹Für alle drei hier behandelten (und ähnliche spezifizierte eingeschränkte Sprachen gibt es übrigens technische Motivationen und Anwendungen: bei der Sprache L etwa kann man sich unter einer “” einen elektromagnetischen Impuls vorstellen, unter einer “0” die Abwesenheit eines solchen. Das Verbot von zwei aufeinanderfolgenden Einsen kann durch die Erholzeit des Impulsgebers bedingt sein. Die Sprache K kann Magnetisierungen beschreiben (keine “Inseln”), die Sprache M Synchronisation bei Rotation mit schwankender Umdrehungszahl.

²Für L ist das einfach, denn man hat es mit einer (2×2) -Matrix zu tun. Für K und M ist das weniger schwierig, als es zunächst den Anschein hat, auch wenn die entsprechenden Matrizen (4×4) -Matrizen sind. Das charakteristische Polynom vom Grad 4 lässt sich in zwei Polynome vom Grad 2 faktorisieren – und quadratische Gleichungen können Sie per Hand lösen. Sie können aber auch geeignete Software zur Hilfe nehmen.