Aufgabe 6: Douglas Hofstadters MIU-System

Im Jahr 1979 veröffentlichte Douglas R. HOFSTADTER das Buch *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, das rasch sehr populär wurde (Pulitzer-Preis!) und zu einer Art "Kult-Buch" der Informatik avancierte. In diesem Buch werden viele Grundprobleme der theoretischen Informatik (Was sind formale Systeme und Logik und was kann man mit ihnen ausdrücken – und was nicht? Was hat es mit "Rekursion" auf sich? Was sind typische Phänomene der Selbsreferenz und die sich daraus ergebenden Probleme?) auf unterhaltsame Weise angesprochen. Das Buch ist unterhaltsam geschrieben, manchmal tiefsinnig, oft auch sehr witzig und amüsant, stellenweise auch etwas länglich (777 Seiten!). Auf alle Fälle lohnt sich die Lektüre, gerade auch für angehende Informatiker, die sich für die grundsätzlicheren, man könnte sagen "kulturellen" Aspekte ihres Faches interessieren und die mit Namen wie Johann Sebastian Bach, Kurt Gödel, Maurits Cornelis Escher, Lewis Caroll, Pierre de Fermat, Alan Turing, Zeno von Elea, Epimenides u.v.a.m. etwas verbinden oder schlicht neugierig darauf sind, was uns diese grossen Geister zu sagen haben.

In seinem Buch führt Hofstadter gleich im ersten Kapitel das Konzept eines formalen Systems an einem einfachen Beispiel ein, dem sog. MIU-System. Es geht dabei um eine formale Sprache, die folgendermassen definiert ist:

- Als Alphabet dienen die drei Symbole M,I,U und die MIU-Sprache besteht aus genau denjenigen Wörtern, die sich aus dem einen "Axiom" MI mit Hilfe der vier folgenden Ableitungsregeln herleiten lassen:

  1. Ist xI ein Wort der MIU-Sprache, dann ist auch xIU ein Wort der MIU-Sprache.
  2. Ist Mx ein Wort der MIU-Sprache, so gilt dies auch für Mxx.
  3. Ist xIIIy ein Wort der MIU-Sprache, so auch xUy.
  4. Ist xUUy ein Wort der MIU-Sprache, so auch xy.

  Dabei sind x und y Variable für Wörter über dem Alphabet {M,I,U}.

Eine typische Ableitung

$$\mathsf{MI} \vdash_2 \mathsf{MII} \vdash_2 \mathsf{MIIII} \vdash_3 \mathsf{MUI} \vdash_1 \mathsf{MUIU} \vdash_2 \mathsf{MUIUUIU} \vdash_4 \mathsf{MUIIU}$$

zeigt, dass alle die in ihr vorkommenden Wörter zur MIU-Sprache gehören.

- Bevor Sie weiterlesen, sollten Sie sich mit dem System praktisch vertraut machen und versuchen herauszufinden, ob das Wort MIUI oder das Wort MU zur MIU-Sprache gehören oder nicht, und wenn ja, wie man sie generiert,

Das MIU-System ist keine Grammatik im üblichen Sinne (wegen der zweiten Regel), und da die Regeln 3. und 4. verkürzend sind, ist nicht einmal klar, dass die so definierte MIU-Sprache überhaupt entscheidbar ist. Natürlich ist sie rekursiv-aufzählbar, denn man kann alle MIU-Wörter systematisch generieren. Hier ist der Anfang der MIU-Ableitungsbaums, kopiert aus dem Originaltext von Hofstadter.

Tatsächlich, und das ist schon etwas überraschend, ist die MIU-Sprache nicht nur entscheidbar, sondern sogar regulär! Der erste Schritt ist nicht schwer. Zeigen sie folgende notwendige Bedingung:

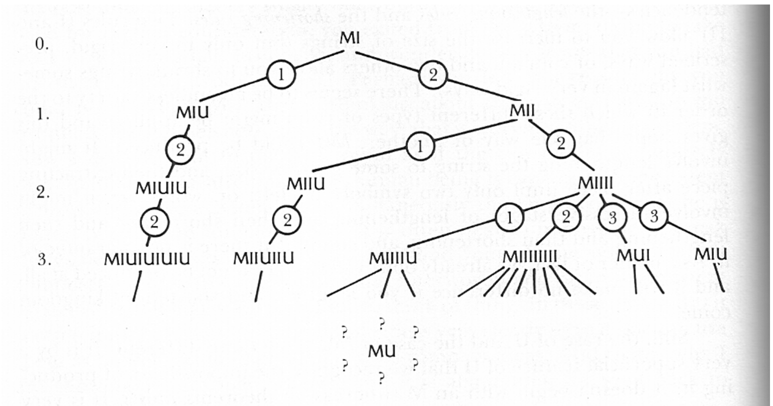

FIGURE 11. A systematically constructed "tree" of all the theorems of the MIU-system. The N*th level down contains those theorems whose derivations contain exactly* N *steps. The encircled numbers tell which rule was employed. Is* MU *anywhere in this tree?*

- Wenn $x \in \{\mathsf{M}, \mathsf{I}, \mathsf{U}\}^*$ zur MIU-Sprache gehört, so beginnt x mit einem M, enthält kein weiteres M und die Anzahl der x vorkommenden I's ist nicht durch 3 teilbar.

Tatsächlich ist diese Bedingung sogar hinreichend:

- Wenn $x \in \{\mathsf{M}, \mathsf{I}, \mathsf{U}\}^*$ mit einem M beginnt, kein weiteres M enthält und die Anzahl der x vorkommenden I's nicht durch 3 teilbar ist, so gehört x zur MIU-Sprache.

Versuchen Sie sich an dem Beweis — ganz einfach ist es nicht, aber auch nicht wirklich schwierig. Die Lösung finden Sie übrigens nicht in Hofstadters Buch. Es ist nicht klar, ob er selbst diese Lösung oder überhaupt ein Entscheidungsverfahren kannte.

Die genannte notwendige und hinreichende Bedingung zeigt klar, dass die MIU-Sprache regulär ist.

- Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der die MIU-Sprache akzeptiert.

Diese Konstruktion können und sollten Sie durchführen, auch wenn Sie den hinreichenden Teil der Charakterisierung nicht bewiesen haben. Der endliche Automat (Transfermatrix) bzw. ein aus ihm leicht herzuleitender regulärer Ausdruck für die MIU-Sprache dient nun für die nächsten Schritte:

- Sei μ_n die Anzahl der Wörter der Länge n der MIU-Sprache. Zeigen Sie, dass folgende C-Rekursion gilt:

$$\mu_n = 3\,\mu_{n-1} - 3\,\mu_{n-2} + 2\mu_{n-3} \quad (n \geq 3), \quad \mu_0 = \mu_1 = 0, \mu_2 = 1$$

- Das charakteristische Polynom der MIU-Rekursion ist also

$$\chi_{MIU}(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 2$$

  und dieses kann man in zwei Faktoren zerlegen:

$$\chi_{MIU}(z) = (z-2)(z^2 - z + 1)$$

  Die Nullstellen sind also $\lambda = 2$, sowie $\alpha, \widehat{\alpha}$ mit

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = (z-2)(z^2 - z + 1) = (\lambda - 2)(z - \alpha)(z - \widehat{\alpha})$$

  Was sind α und $\widehat{\alpha}$? (Explizite Formel!)
  Welchen Absolutbetrag haben α und $\widehat{\alpha}$?
  Hinweis: α und $\widehat{\alpha}$ sind nicht reell!

- Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c der Exponentialsummendarstellung

$$\mu_n = a \cdot 2^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \widehat{\alpha}^n$$

- Was können Sie über das asymptotische Verhalten von μ_n aussagen?
  Wie wirken sich die Terme $b \cdot \alpha^n + c \cdot \widehat{\alpha}^n$ aus?
  Hinweis: α^n und $\widehat{\alpha}^n$ sorgen für ein periodisches Verhalten mit der Periodenlänge 6.

- (Optional) Beweisen Sie nun noch die Darstellung

$$\mu_n = \lfloor \frac{2^n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n \bmod 6}{3} \rfloor$$

  Beachten Sie, der zweite Summand ist $= 0$ für $n \equiv 0, 1, 2 \bmod 6$ und $= 1$ für $n \equiv 3, 4, 5 \bmod 6$.

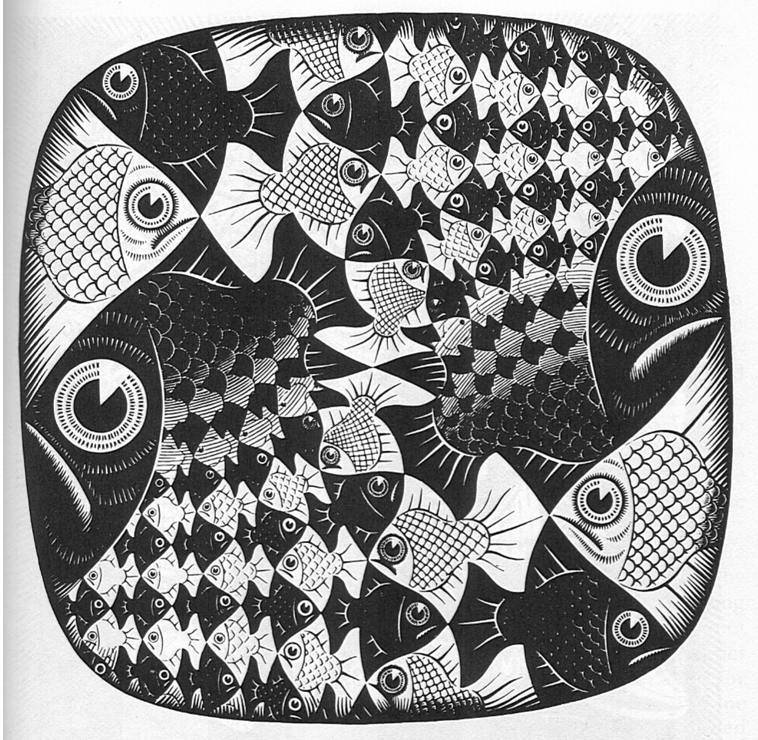

FIGURE 36. Fish and Scales, *by M. C. Escher (woodcut, 1959).*

Aus einer Besprechung:

Douglas R. Hofstadter benutzt amüsante, paradox-surreale Dialoge, die Bilder Eschers, die Musik Bachs und eine Fülle von Ideen aus so unterschiedlichen Gebieten wie Logik, Biologie, Psychologie, Physik und Linguistik, um eines der grössten Geheimnisse zu durchleuchten: unsere offensichtliche Unfähigkeit, die Natur unseres eigenen Denkens zu verstehen. Hofstadters Grenzgänge durch das menschliche Bewutsein und die Welt der “denkenden” Maschinen sind eng verknüpft mit den revolutionären Entdeckungen des Mathematikers Kurt Gödel, mit den Möglichkeiten der Sprache, mathematischen Systemen, Computerprogrammen oder menschlichen Artefakten, denen es gelingt, in einer unendlichen Spiegelung ihrer selbst über sich selbst zu sprechen.