## Aufgabe 21: Optimales Matrizenprodukt – ein Spezialfall

Es sei $(a_0, a_1, a_n, \ldots, a_n)$ eine Folge von positiven ganzen Zahlen. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ seien Matrizen, wobei die Matrix $M_k$ das Format $a_{k-1} \times a_k$ haben soll $(1 \leq k \leq n)$. Es geht um die Frage, wie man das Produkt

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

mit möglichst wenig Aufwand ausrechnet. Gesucht ist die optimale Klammerung unter den $b_{n-1}$ verschiedenen Möglichkeiten, die durch die Binärbäume $t \in \mathcal{B}_{n-1}$ gegeben sind – siehe Abschnitt 5.5 des Skripts. Dabei sei der Aufwand für das Produkt $A \times B$ einer $(a \times b)$-Matrix $A$ mit einer $(b \times c)$-Matrix $B$

$$\mathtt{cost}(A, B) = a \cdot b \cdot c.$$

Da diese Konsten nur von dem Format der beiteiligten Matrizen abhängen, also von der Folge $(a, b, c)$, kann man auch einfach

$$\mathtt{cost}(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

schreiben. Die Kosten für die Multiplikation $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, wobei $t \in \mathcal{B}_{n-1}$ der Binärbaum ist, der die Klammerung beschreibt, werden dann mit

$$\mathtt{cost}(t; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

bezeichnet. Sie berechnen sich induktiv mittels

$$\mathtt{cost}(t; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} \mathtt{cost}(t_\ell; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)+ \\ \mathtt{cost}(t_r; a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)+ \\ a_0 \cdot a_k \cdot a_n \end{cases}$$

falls $t_\ell \in \mathcal{B}_{k-1}$ und $t_r \in \mathcal{B}_{n-k-1}$ gilt.

In dieser Aufgabe soll der Spezialfall betrachtet werden, dass die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (schwach) monoton steigend ist, also

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots, \leq a_n.$$

1. Durch Ausprobieren kleiner Beispiele kommt man schnell zu der Vermutung, dass in diesem Fall die Auswertung

   $$(*) \quad (\cdots((M_1 \times M_2) \times M_3) \cdots) \times M_n$$

   optimal ist.

   (a) Prüfen Sie die Optimalitätsvermutung für $n = 3$ und $n = 4$ explizit nach.

   (b) Was sind die Kosten für das in $(*)$ gegebene Auswertungsschema?

   (c) Beweisen Sie dann Optimalitätsvermutung durch Induktion über den Aufbau von Klammerungen (= Binärbäumen).

2. Betrachten Sie den Fall $n = 3$. Zeigen Sie, dass die beiden Auswertungsmöglichkeiten, die den Binärbäumen aus $\mathcal{B}_2$ entsprechen, genau dann die gleichen Kosten haben, wenn $a_0 = a_1$ und $a_2 = a_3$ ist. (Dabei ist $a_1 < a_2$ durchaus möglich).

3. Betrachten Sie nun den Fall $n = 4$. Zeigen Sie, dass die fünf Auswertungsmöglichkeiten, die den Binärbäumen aus $\mathcal{B}_3$ entsprechen, genau dann die gleichen Kosten haben, wenn $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ ist.

4. Folgern Sie, das die entsprechende Aussage zum vorigen Punkt für alle $n \geq 4$ zutrifft.