

**Aufgabe 1: Fingerübungen zum Rechnen mit Logarithmen**

Bemerkung: Der sichere Umgang mit Logarithmen (und anderen elementaren Funktionen der Mathematik, wie Polynome, Exponentialfunktion, Winkelfunktionen) ist nicht Stoff der Veranstaltung, sondern gehört zum Handwerkszeug, dass man vorab beherrschen sollte. Die nachfolgenden Aufgaben sind als Test zu verstehen: wer mit so etwas ernsthaft Schwierigkeiten hat, hat etwas nachzuholen. Diese Aufgaben werden nicht unbedingt alle in der Übungsgruppe behandelt.

Bezeichnung: für positives reelles  $b$  und positives reelles  $y$  bezeichnet  $\log_b y$  den Logarithmus von  $y$  zur Basis  $b$ : das ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl  $x$  mit  $b^x = y$ . Logarithmen zur Basis  $b = 2$  werden oft einfach mit  $\log y$  oder  $\lg y$  bezeichnet, “natürliche” Logarithmen zur Basis  $e$  mit  $\ln y$ .

1. Ist  $c$  eine weitere positive reelle Zahl, wie drückt sich  $\log_c y$  mittels Logarithmen zur Basis  $b$  aus?
2. In welchem Verhältnis stehen  $\log_{10} 2$  und  $\log_2 10$  zueinander?
3. Wieviele Binärstellen genügen in jedem Fall, um eine 14-stellige Dezimalzahl im Binärsystem darzustellen?
4. Wieviele Dezimalstellen hat die Zahl<sup>1</sup>  $2^{128} + 1$  ?
5. Überzeugen Sie sich erst einmal durch Beispiele (mittels Taschenrechner, Maple, Logarithmentafel, ...) davon, dass für beliebiges  $x > 0$  die Zahlen  $\log_2 x$  und  $\ln x + \log_{10} x$  verblüffend nahe beieinander liegen. Wie gross ist der relative Fehler?
6. Wie drückt sich  $\log_b \log_b x$  mittels natürlicher Logarithmen aus?
7. An welcher Stelle nimmt die Funktion  $x \mapsto x * \log_b x$  für  $x \in \mathbb{R}_+$  ihr Minimum an?
8. An welcher Stelle nimmt die Funktion  $b \mapsto b * \log_b x$  für  $b \in \mathbb{R}_+$  ihr Minimum an?
9. Was ist das Minimum der Funktion  $x \mapsto x \cdot \sqrt[n]{n}$  für  $x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ ?
10. Zeigen Sie, dass  $\log_{10} 2$  keine rationale Zahl ist.

---

<sup>1</sup>N.B. Mit der Faktorisierung dieser Zahl in ihre zwei Primfaktoren durch M. Morrison und J. Brillhard im Jahr 1970 begann die Neuzeit des Faktorisierens.