Aufgabe 5: Übungen zum Umgang mit asymptotischer Notation

Hinweis: diese Aufgaben sind teilweise dem Buch *Introduction to Algorithms (2nd ed.)* von Cormen, Leiserson, Rivest, Stein (MIT Press) entnommen. Abschnitt 3.1 dieses Buchs bietet eine ausführliche Diskussion der Definitionen und Begriffe und viele Beispiele.

1. Was bedeuten die folgenden vier Aussagen für eine Folge $(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ reeller Zahlen in üblicher mathematischer Terminologie:

   (a) $a_n \in O(1)$

   (b) $a_n \in o(1)$

   (c) $a_n \in \Theta(1)$

   (d) $a_n \sim 1$

   Welche dieser Aussagen impliziert welche andere und wo ist das nicht der Fall? Was bedeuten die Aussagen, wenn man die a_n als ganzzahlig voraussetzt?

2. Von zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ sei $a_n \sim b_n$ bekannt. Man interessiert sich nun für das asymptotische Verhalten der Differenzenfolge $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$. Welche der folgenden Aussagen sind immer, bzw. machmal, aber nicht immer, bzw. niemals zutreffend:

   (a) $a_n - b_n \in o(1)$

   (b) $a_n - b_n \in O(1)$

   (c) $a_n - b_n \in o(a_n)$

   (d) $a_n - b_n \in O(a_n)$

   (e) $a_n - b_n \in \Theta(a_n)$

   (f) $a_n - b_n \sim a_n$

3. Welche der folgenden Aussagen über Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ sind wahr und welche sind falsch:

   (a) $a_n \in O(b_n) \quad \Rightarrow \quad b_n \in O(a_n)$

   (b) $a_n + b_n \in \Theta(\min(a_n, b_n))$

   (c) $a_n \in \Theta(a_{n/2})$

   (d) $a_n \in O(a_n^2)$

   (e) $a_n \in O(b_n) \quad \Rightarrow \quad b_n \in \Omega(a_n)$

   (f) $a_n \in O(b_n) \quad \Rightarrow \quad 2^{a_n} \in O(2^{b_n})$

   (g) $b_n \in o(a_n) \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \in \Theta(a_n)$

4. Vergleichen Sie die in der folgenden Tabelle genannten Paare von Funktionsausdrücken (in Abhängigkeit von n) in ihrem asymptotischen Verhalten, d.h. ob eine oder mehrer der Relationen $O, o, \Omega, \omega, \Theta$ zwischen ihnen bestehen:

f	g	O	o	Ω	ω	Θ
$\log^k n$	n^α					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log c}$	$c^{\log n}$					
$\log n!$	$\log n^n$					

   Dabei seien $k \geq 1$, $\alpha > 0$, $c > 1$ Konstante.

5. Alle Beziehungen $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ auf Folgen (oder Funktionen) sind transitiv. Welche sind reflexiv? Welche sind symmetrisch?

6. Durch die Relationen auf Folgen (oder Funktionen)

$$\begin{array}{lcll} (a_n)_{n\geq 0} \prec (b_n)_{n\geq 0} & \Leftrightarrow & a_n \in o(b_n) & \text{bzw.} \\ (a_n)_{n\geq 0} \preccurlyeq (b_n)_{n\geq 0} & \Leftrightarrow & a_n \in O(b_n) & \end{array}$$

   wird eine Ordnungsrelation bezüglich des asymptotischen Wachstums definiert, wobei die "Gleichheit" (im Sinne "gleicher Wachstumsordnung") durch

$$(a_n)_{n\geq 0} \approx (b_n)_{n\geq 0} \quad \Leftrightarrow \quad a_n \in \Theta(b_n)$$

   ausgedrückt wird.
   Ordnen Sie die folgenden mit der Variablen n indizeirten Funktionen (oder Folgen) im Sinne dieser Ordnungsrelation aufsteigend:

$$\begin{array}{ccccccc} n! & \sqrt{\log n} & 2^n & \log^2 n & n^3 & 4^{\log n} & \log\log n \\ (\log n)^{\log n} & n \cdot 2^n & n^2/\log n & 2^{\sqrt{2\log n}} & 1 & 2^{2^{n+1}} & \log(n!) \\ (\sqrt{2})^{\log n} & (3/2)^n & n^{\log\log n} & \sum_{k=1}^n 1/k & \binom{n}{3} & \sum_{k=1}^n 1/k^2 & \binom{2n}{n} \end{array}$$