

Aufgabe 3: Rekursion und Induktion mit FIBONACCI

Die durch die Rekursion

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

definierte Folge der FIBONACCI-Zahlen $(f_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ muss immer wieder als Ur-Beispiel einer rekursiven Definition herhalten. Tatsächlich hat diese Zahlenfolge aber so interessante Eigenschaften und ist so häufig vorkommend in Natur, Wissenschaft, Kunst, Architektur, etc., dass man ihr ganze Bücher, eine Serie von Tagungen und sogar eine eigene Zeitschrift (THE FIBONACCI QUARTERLY) gewidmet hat. Der tiefere Grund ist der Zusammenhang mit dem *Goldenen Schnitt*, also der reellen Zahl

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots,$$

die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$X^2 = X + 1.$$

Die andere (negative) Lösung $(1 - \sqrt{5})/2 = -0.61803\dots$ wird mit $\hat{\phi}$ bezeichnet.

Im Zusammenhang mit dem euklidischen Algorithmus spielen die FIBONACCI-Zahlen auch eine bedeutsame Rolle – mehr davon später.

Beweise über rekursive Programme bzw. rekursiv definierte Objekte führt man mittels Induktion. Trainieren Sie Ihre Fertigkeiten in dieser Technik, indem Sie die folgenden Aussagen über die FIBONACCI-Zahlen sorgfältig per Induktion beweisen:

$$(a) \quad f_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} \quad (n \geq 0) \qquad (b) \quad f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

(c) Beweisen Sie ebenso sorgfältig (im Sinne der Analysis), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

gilt. Veranschaulichen Sie grafisch das Konvergenzverhalten der Folge der Quotienten

$$\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right)_{n \geq 1}$$

d.h. tragen Sie die ersten numerischen Werte auf einer Zahlengeraden ab und beobachten Sie, wie sich die Folge entwickelt.

(d) Wie gross sind $f_{100}, f_{200}, f_{300}, f_{400}$? Damit ist gemeint: wieviel Dezimalziffern bzw. Binärziffern braucht man, um diese Zahlen hinzuschreiben? Sie sollen diese Zahlen nicht ausrechnen, sondern eine gute Schätzung abgeben, ohne viel zu rechnen!