Aufgabe 29: Das Spiel von EUKLID

Das Spiel EUKLID besteht aus folgenden Vereinbarungen:

- Positionen im Spiel sind (ungeordnete) Paare $\{a, b\}$ von natürlichen Zahlen
- Ein Zug führt, ausgehend von einer Position $\{a, b\}$ (mit $a \geq b$) zu einer der Positionen $\{a - kb, b\}$, wobei $1 \leq k \leq \lfloor a/b \rfloor$.
- Gewinnpositionen sind diejenigen Positionen, aus denen heraus kein Zug mehr möglich ist, also die Positionen $\{a, 0\}$.
- Spieler A und B ziehen abwechselnd, beginnend mit einer Position $\{a, b\}$; gewonnen hat, wer mit seinem Zug eine Gewinnposition erreicht.

Beispiele für Spielverläufe:

$$\{78, 35\} \stackrel{A}{\to} \{43, 35\} \stackrel{B}{\to} \{8, 35\} \stackrel{A}{\to} \{8, 11\} \stackrel{B}{\to} \{8, 3\} \stackrel{A}{\to} \{2, 3\} \stackrel{B}{\to} \{2, 1\} \stackrel{A}{\to} \{0, 1\}$$

Spieler A hat gewonnen.

$$\{78, 35\} \stackrel{A}{\to} \{8, 35\} \stackrel{B}{\to} \{8, 19\} \stackrel{A}{\to} \{8, 3\} \stackrel{B}{\to} \{2, 3\} \stackrel{A}{\to} \{2, 1\} \stackrel{B}{\to} \{0, 1\}$$

Diesmal hat B gewonnen.
Untersuchen Sie dieses Spiel und stellen Sie fest, in welchen Situationen A bzw. B eine Gewinnstrategie hat, d.h. einen Spielgewinn erzwingen kann, gleichgültig wie der Gegner reagiert.
Hinweis: der "goldene Schnitt" spielt hierbei die entscheidende Rolle, wobei folgende Tatsache nützlich ist: die Hyperbel $y = 1 + 1/x$ und die Gerade $y = x$ schneiden sich in der Ebene im Punkt (ϕ, ϕ) (warum?). Daher gilt für jede positive reelle Zahl x die Aussage: $x < \phi \Leftrightarrow 1 + 1/x > \phi$. Sind also a, b positive natürliche Zahlen, so gilt $\frac{a}{b} < \phi \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} > \phi$.