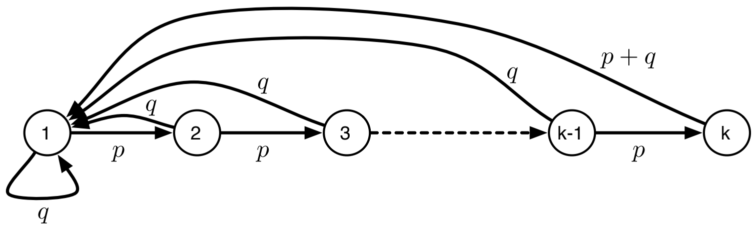
Aufgabe 7: Devil's Staircase

Ein Betrunkener versucht eine Treppe emporzusteigen – dabei hat er so seine Probleme, die folgendermassen beschrieben werden können. Dabei sei p eine reelle Zahl mit $0 < p < 1$, die als Wahrscheinlichkeit gedeutet wird[1]

- Die Treppe besteht aus den k Zuständen ("Stufen") $S_1, S_2, \dots S_k$. Der Betrunkene startet auf Stufe S_1.
- Mit jedem Schritt versucht er eine Stufe höher zu kommen, aber folgendes passiert:
  - Wenn sich der Betrunkene auf Stufe S_j mit $j < k$ befindet, schafft er es mit Wahrscheinlichkeit p auf die Stufe S_{j+1}, aber mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ fällt er auf die Stufe S_1 zurück.
  - Wenn sich der Betrunkene auf Stufe S_k befindet, fällt er mit Wahrscheinlichkeit $p + q = 1$ ganz auf die Anfangsstufe S_1 zurück.



Sie können diese grafische Darstellung

- entweder als einen endlichen Automaten (mit Startzustand S_1) interpretieren, indem sie p und q als Symbole eines Eingabealphabets betrachten, oder
- als Markov-Kette betrachten, bei der die Transitionen zwischen den Zustäänden mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. q geschehen (und keine anderen, als die eingezeichneten vorkommen).

Im folgenden sollten Sie die "stochastische" Interpretation verwenden. Dabei geht es um die Frage, auf welcher Stufe S_ℓ man den Betrunkenen nach längerer Zeit mit welcher Wahrscheinlichkeit antrifft?

1. Geben Sie die (stochastischen)Matrizen $A_{k,p}$ an für $k = 2, 3, 4$ explizit an und berechnen Sie deren charakteristisches Polynom. Welches sind die Eigenwerte?
2. Wie sehen die Matrizen $A_{k,p}$ allgemein aus, die das Geschehen in einem Schritt auf dieser "Teufelsleiter" beschreiben?
   Zeigen Sie (z.B. per Induktion), dass

$$\chi_{k,p}(z) = (z - 1) \cdot \frac{z^k - p^k}{z - p}$$

[1] p steht nicht für "Promille"! Je grösser p ist, desto "erfolgreicher" ist der Betrunkene.

das charakteristische Polynom der Matrix $A_{k,p}$ ist. Wo liegen die Eigenwerte der Matrix $A_{k,p}$ in der komplexen Ebene? Machen Sie sich ein Bild davon![2]

3. Es bezeichne nun $\mathtt{P}_\ell^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrunkene nach n Schritten auf der Stufe S_ℓ anzutreffen ist. Begründen Sie die Feststellung

$$\mathtt{P}_\ell^{(n)} = \mathtt{P}_1^{(n-\ell+1)} \cdot p^{\ell-1} \quad (n \geq \ell - 1).$$

4. Teil 2 der Aufgabe besagt insbesondere, dass $\lambda = 1$ ein dominanter Eigenwert der Matrix $A_{k,p}$ ist. Daher gibt es eine eindeutig bestimmte stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_\ell)_{1\leq\ell\leq k}$ auf der Menge $\{S_\ell\,;\,1 \leq \ell \leq k\}$ der Zustände und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathtt{P}_\ell^{(n)} = \pi_\ell \quad (1 \leq \ell \leq k).$$

Bestimmen Sie $(\pi_\ell)_{1\leq\ell\leq k}$, aber nicht, indem sie ein Eigenwertproblem lösen, sondern die Beziehung aus Teil 3 geschickt ausnützen.

Hinweis: Das Ganze hat etwas mit einer endlichen geometrischen Reihe zu tun. Schauen Sie in Kapitel 1 nach, falls Sie vergessen haben, was es damit auf sich hat.

[2] Bedenken Sie folgendes: das Polynom $X^k = 1$ hat in $\mathbb{C}$ die k Nullstellen $e^{2\pi i(\ell/k)}$ für $0 \leq \ell < k$, genannt die (komplexen) k-ten Einheitswurzeln, die uns im Zusammenhang mit der Diskreten Fouriertransformation noch beschäftigen werden. Bezeichnet man mit ω_k die komplexe Zahl $e^{2\pi i/k} = \cos(2\pi/k) + i \cdot \sin(2\pi/k)$, so sind die Nullstellen von $X^k = 1$ gerade die Zahlen ω_k^ℓ für $0 \leq \ell < k$, das sind die Teilungspunkte, wenn man den komplexen Einheitskreis der Länge 2π in k gleichlange Teile teilt, wobei $\omega_k^0 = 1$ ein Teilungspunkt ist.