Aufgabe 20: Balancierte Binärbäume

Eine Binärbaum t heisst *balanciert*, falls für alle Blätter $b, b' \in E(t)$ gilt:

$$\big|h(b,t) - h(b',t)\big| \leq 1,$$

d.h. alle Blätter liegen auf demselben Niveau oder auf zwei benachbarten Niveaus. Balanciert Bäume sind beliebt, da sie optimal bezüglich der Weglänge sind, also auch bezüglich der Suche, wenn sie als binäre Suchbäume verwendet werden.

1. Stellen Sie fest, welche der folgenden, durch ihren DYCK-Code gegebenen Binärbäume balanciert sind.

   000110101101 000111001101 000111010011

2. Geben Sie für jeden dieser Binärbäume eine Permutation an, die genau diesen Baum als binären Suchbaum erzeugt.

3. Geben Sie für jeden dieser Binärbäume an, wieviele Permutationen genau diesen Binärbaum als binären Suchbaum erzeugen.

4. Sei nun $n = 2^k + r$ mit $0 \leq r < 2^k$, also $k = \lfloor \log n \rfloor$ und $r = n - 2^{\lfloor \log n \rfloor}$.

   Zeigen Sie: für einen balancierten Binärbaum $t \in \mathcal{B}_{n-1}$ haben genau $2^k - r$ Blätter das Niveau k und $2r$ Blätter das Niveau $k+1$.

5. Was ist die innere bzw. äussere Weglänge für einen solchen balancierten Binärbaum (als Funktion von n)?

6. Wieviele verschiedene balancierte Binärbäume gibt es in $\mathcal{B}_{n-1}$?

7. Betrachten Sie von jetzt an den Fall $n = 2^{k+1}$. Es gibt in diesem Fall nur einen einzigen balancierten Binärbaum mit n Blättern, der mit t_k bezeichnet wird. Wieviele innere Knoten von t_k haben die Höhe h $(1 \leq h \leq k)$?

8. Wieviele Permutationen aus $\mathcal{S}_n$ liefern t_k als binären Suchbaum?

9. Es sei π_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Permutation aus $\mathcal{S}_n$ den balancierten Baum t_k als binären Suchbaum hat. Zeigen Sie:

   $$\pi_k = \frac{1}{2^{k+1} - 1} \cdot \pi_{k-1}^2$$

10. (Bonusaufgabe)

    Sei nun $a_k = -\log \pi_k$. Dann besagt die Gleichung aus dem vorigen Punkt, dass

    $$a_k = 2 \cdot a_{k-1} + \log(2^{k+1} - 1)$$

    gilt. Verwenden Sie diese Gleichung, um Informationen über das asymptotische Verhalten der a_k und damit der π_k zu erhalten.