
Übungen zu Theoretische Informatik 3

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue: elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et de découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1822) in *Théorie analytique de la chaleur*

- **Aufgabe 37: Auswertung und Interpolation**

1. Ein Polynom $p(X)$ mit $\deg p(X) < 4$ sei durch folgende Werte festgelegt:

$$p(1) = 1, p(i) = 2, p(-1) = 3, p(-i) = 4$$

Bestimmen Sie die Koeffizientendarstellung dieses Polynoms.

Berechnen Sie die Werte $p(5)$ und $p(-2 + 3i)$

2. Berechnen Sie das Produkt der Polynome

$$a(X) = 1 - 3X^2 + 5X^3 \quad \text{und} \quad b(X) = 2 + X - X^2 + 4X^3,$$

indem Sie geeignet auswerten und interpolieren.

3. Die Interpolationsformel von Lagrange zeigt, dass ein Polynom $f(X)$ vom Grad $< n$ durch seine Werte an n verschiedenen Stellen y_0, y_1, \dots, y_{n-1} eindeutig bestimmt ist. Welche Formel besagt, dass ein Polynom $f(X)$ vom Grad $< n$ durch die n Werte $f(y), f'(y), \dots, f^{(n-1)}(y)$ seiner n Ableitungen $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ an einer festen Stelle y eindeutig bestimmt ist?

- **Aufgabe 38: Aufwand für die Polynommultiplikation mittels FFT**

Der Aufwand für die Schnelle Fouriertransformation der Ordnung $n = 2^k$, gemessen an der Anzahl der arithmetischen Operationen mit komplexen Zahlen, genügt der Rekursionsgleichung

$$\text{fft}(n) = 2 \cdot \text{fft}(n/2) + 2 \cdot n, \text{fft}(1) = 0.$$

Lösen Sie diese Rekursionsgleichung exakt und ermitteln Sie den Aufwand $\text{multfft}(n)$ für das Multiplizieren von zwei Polynomen vom Grad $< n$ mittels FFT. Das Ergebnis soll die Form

$$\text{multfft}(n) \leq a \cdot n \cdot \log n + b \cdot n$$

haben, d.h. Sie sollen a und b bestimmen.

Vergleichen Sie dies mit dem Aufwand für die konventionelle Art der Polynommultiplikation. Wo liegt der *break-even-point*?

• **Aufgabe 39: Eigenschaften der DFT-Matrizen**

Es bezeichne DFT_n die Matrix der Diskreten Fouriertransformation der Ordnung n , d.h., es ist

$$\text{DFT}_n = V(\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}) = [\omega_n^{i \cdot j}]_{0 \leq i, j < n} \quad \text{mit } \omega_n = e^{2\pi i/n}.$$

1. Wie sieht die Matrix DFT_n^2 aus?
2. Welches ist der Absolutbetrag der Determinante von DFT_n ?
3. Welches ist der exakte Wert der Determinante von DFT_n ?
4. Die Fourier-Transformierte eines *reellen* Vektors $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ kann natürlich durchaus komplexe (also nicht notwendig reelle) Komponenten haben. Zeigen Sie, dass die *Realteile* von $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) = \text{DFT}_n \mathbf{a}^t$ in diesem Fall eine Symmetrieeigenschaft haben: $\mathcal{R}(b_k) = \mathcal{R}(b_{n-k})$ für $1 \leq k < n$ ($\mathcal{R} = \text{Realteil}$). Was passiert, wenn der input-Vektor \mathbf{a} nur rein-imaginäre Komponenten hat?

Hinweis: Es kann helfen, das zuerst mal für kleine Werte von n auszurechnen, um zu sehen, was passiert.

• **Aufgabe 40: Für Experimentierfreudige**

Im Tagebuch zu dieser Vorlesung finden Sie ein Datenfile *signal.txt*. Dieses enthält eine Liste der Länge 256 mit floating-point-Zahlen als Einträgen. Es handelt sich um die Diskretisierung einer Überlagerung von vier harmonischen Schwingungen, die stark verrauscht ist. Bestimmen Sie die Frequenzen und Intensitäten der vier harmonischen Schwingungen und beseitigen Sie das Rauschen durch geeignetes Filtern.

Hinweis: Es ist nicht nur erlaubt, sondern ausdrücklich erwünscht, daß Sie sich der Rechenfähigkeiten von Maple bedienen. Maple enthält auch *FFT*-Prozeduren.

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen, redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache und dann ist es alsobald etwas ganz anderes.

Johann Wolfgang von Goethe (1829)