- **ggT und kgV anschaulich gemacht**

  1. Auf kariertem Papier sei ein $(a \times b)$-Rechteck (a, b positive ganze Zahlen) markiert. Wieviele des $a \cdot b$ Quadrate werden von der Diagonalen, die das linke untere Eck mit dem rechten oberen Eck des Rechtecks verbindet, durchquert (und nicht nur in einem Eckpunkt berührt)?
     NB: Sie können die Frage auch so stellen: auf einem Bildschirm soll eine Gerade zwischen zwei Punkten (Pixeln) approximiert dargestellt werden, indem "passende" Pixel zum Leuchten gebracht werden. Welche? Wieviele?
  2. Es seien a, s, t ganze Zahlen mit $a > 0$. Man bewegt sich auf $\mathbb{Z}$ indem man von einer gegebenen Position x aus in einem Schritt um a Einheiten nach links (nach $x - a$) oder rechts (nach $x + a$) geht. Unter welcher Bedingung kann man von s ausgehend in endlich vielen (wievielen?) Schritten t erreichen?
  3. Es seien a, b, s, t ganze Zahlen mit $a, b > 0$. Man bewegt sich auf $\mathbb{Z}$ indem man von einer gegebenen Position x aus in einem Schritt um a oder b Einheiten nach links (nach $x - a$ bzw. $x - b$) oder rechts (nach $x + a$ bzw. $x + b$) geht. Unter welcher Bedingung (notwendig und hinreichend!) kann man von s ausgehend in endlich vielen (wievielen?) Schritten t erreichen?

- **Extra: das Spiel von Euklid**
  Das Spiel Euklid besteht aus folgenden Vereinbarungen:

  – Positionen im Spiel sind (ungeordnete) Paare $\{a, b\}$ von natürlichen Zahlen
  – Ein Zug führt, ausgehend von einer Position $\{a, b\}$ (mit $a \geq b$) zu einer der Positionen $\{a - kb, b\}$, wobei $1 \leq k \leq \lfloor a/b \rfloor$.
  – Gewinnpositionen sind diejenigen Positionen, aus denen heraus kein Zug mehr möglich ist, also die Positionen $\{a, 0\}$.
  – Spieler A und B ziehen abwechselnd, beginnend mit einer Position $\{a, b\}$; gewonnen hat, wer mit seinem Zug eine Gewinnposition erreicht.

  Beispiele für Spielverläufe:

  $$\{78, 35\} \stackrel{A}{\to} \{43, 35\} \stackrel{B}{\to} \{8, 35\} \stackrel{A}{\to} \{8, 11\} \stackrel{B}{\to} \{8, 3\} \stackrel{A}{\to} \{2, 3\} \stackrel{B}{\to} \{2, 1\} \stackrel{A}{\to} \{0, 1\}$$

  Spieler A hat gewonnen.

  $$\{78, 35\} \stackrel{A}{\to} \{8, 35\} \stackrel{B}{\to} \{8, 19\} \stackrel{A}{\to} \{8, 3\} \stackrel{B}{\to} \{2, 3\} \stackrel{A}{\to} \{2, 1\} \stackrel{B}{\to} \{0, 1\}$$

  Diesmal hat B gewonnen.
  Untersuchen Sie dieses Spiel und stellen Sie fest, in welchen Situationen A bzw. B eine Gewinnstrategie hat, d.h. einen Spielgewinn erzwingen kann, gleichgültig wie der Gegner reagiert.
  Hinweis: der "goldene Schnitt" spielt hierbei die entscheidende Rolle, wobei folgende Tatsache nützlich ist: die Hyperbel $y = 1 + 1/x$ und die Gerade $y = x$ schneiden sich in der Ebene im Punkt (ϕ, ϕ) (warum?). Daher gilt für jede positive reelle Zahl x die Aussage: $x < \phi \Leftrightarrow 1 + 1/x > \phi$. Sind also a, b positive natürliche Zahlen, so gilt $\frac{a}{b} < \phi \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} > \phi$.