

**Übungen zur
Theoretische Informatik 3
WS 2004/05**

There you have it. Now you may begin trying to make MU. Don't worry if you don't get it. Just try out a bit — the main thing is for you to get the flavor of the MU-puzzle. Have fun.

D. R. HOFSTADTER in Kapitel 1 von *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*

• **Aufgabe 27: Hofstadters MIU-System**

Im Jahr 1979 veröffentlichte Douglas R. HOFSTADTER das Buch *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, das rasch sehr populär wurde (Pulitzer-Preis!) und zu einer Art “Kult-Buch” der Informatik avancierte. In diesem Buch werden viele Grundprobleme der theoretischen Informatik (Was sind formale Systeme und Logik und was kann man mit ihnen ausdrücken – und was nicht? Was hat es mit “Rekursion” auf sich? Was sind typische Phänomene der Selbstreferenz und die sich daraus ergebenden Probleme?) auf unterhaltsame Weise angesprochen. Das Buch ist unterhaltsam geschrieben, manchmal tiefsinnig, oft auch sehr witzig und amüsant, stellenweise auch etwas länglich (777 Seiten!). Auf alle Fälle lohnt sich die Lektüre, gerade auch für angehende Informatiker, die sich für die grundsätzlicheren, man könnte sagen “kulturellen” Aspekte ihres Faches interessieren und die mit Namen wie Johann Sebastian Bach, Kurt Gödel, Maurits Cornelis Escher, Lewis Carroll, Pierre de Fermat, Alan Turing, Zeno von Elea, Epimenides u.v.a.m. etwas verbinden oder schlicht neugierig darauf sind, was uns diese grossen Geister zu sagen haben.

In seinem Buch führt Hofstadter gleich im ersten Kapitel das Konzept eines formalen Systems an einem einfachen Beispiel ein, dem sog. MIU-System. Es geht dabei um eine formale Sprache, die folgendermassen definiert ist:

- Als Alphabet dienen die drei Symbole M,I,U und die MIU-Sprache besteht aus genau denjenigen Wörtern, die sich aus dem einen “Axiom” MI mit Hilfe der vier folgenden Ableitungsregeln herleiten lassen:
 1. Ist xI ein Wort der MIU-Sprache, dann ist auch xIU ein Wort der MIU-Sprache.
 2. Ist Mx ein Wort der MIU-Sprache, so gilt dies auch für Mxx .
 3. Ist $xIIIy$ ein Wort der MIU-Sprache, so auch xUy .
 4. Ist $xUUy$ ein Wort der MIU-Sprache, so auch xy .

Dabei sind x und y Variable für Wörter über dem Alphabet $\{M,I,U\}$.

Eine typische Ableitung

$$MI \vdash_2 MII \vdash_2 MIII \vdash_3 MUI \vdash_1 MUIU \vdash_2 MUIUIU \vdash_4 MUIIU$$

zeigt, dass alle die in ihr vorkommenden Wörter zur MIU-Sprache gehören.

- Bevor Sie weiterlesen, sollten Sie sich mit dem System praktisch vertraut machen und versuchen herauszufinden, ob das Wort MIUI oder das Wort MU zur MIU-Sprache gehören oder nicht, und wenn ja, wie man sie generiert,

- Leiten Sie die erzeugende Funktion her:

$$\sum_{n \geq 0} \mu_n z^n = \frac{z^2}{1 - 3z + 3z^2 - 2z^3}$$

- Das Nennerpolynom lässt sich leicht faktorisieren:

$$1 - 3z + 3z^2 - 2z^3 = (1 - 2z)(1 - z + z^2) = (1 - 2z)(1 - \alpha \cdot z)(1 - \hat{\alpha} \cdot z)$$

Was sind α und $\hat{\alpha}$? (Explizite Formel!)

Welchen Absolutbetrag haben α und $\hat{\alpha}$?

Hinweis: α und $\hat{\alpha}$ sind nicht reell.

- Machen Sie Partialbruchzerlegung:

$$\frac{z^2}{1 - 3z + 3z^2 - 2z^3} = \frac{a}{1 - 2z} + \frac{b}{1 - \alpha \cdot z} + \frac{c}{1 - \hat{\alpha} \cdot z}$$

und erhalten Sie die Exponentialsummandarstellung

$$\mu_n = a \cdot 2^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \hat{\alpha}^n$$

Geben Sie die Konstanten a, b, c explizit an.

- Was können Sie über das asymptotische Verhalten von μ_n aussagen?

Wie wirken sich die Terme $b \cdot \alpha^n + c \cdot \hat{\alpha}^n$ aus?

Hinweis: α^n und $\hat{\alpha}^n$ sorgen für ein periodisches Verhalten mit der Periodenlänge 6.

- Zeigen Sie nun noch die Darstellung

$$\mu_n = \lfloor \frac{2^n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n \bmod 6}{3} \rfloor$$

Beachten Sie, der zweite Summand ist $= 0$ für $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{6}$ und $= 1$ für $n \equiv 3, 4, 5 \pmod{6}$.

- Wenn Sie nun noch Claude SHANNON nach der Coderate der MIU-Sprache fragte, was können Sie ihm antworten?

Aus einer Besprechung:

Douglas R. Hofstadter benutzt amüsante, paradox-surreale Dialoge, die Bilder Eschers, die Musik Bachs und eine Fülle von Ideen aus so unterschiedlichen Gebieten wie Logik, Biologie, Psychologie, Physik und Linguistik, um eines der grössten Geheimnisse zu durchleuchten: unsere offensichtliche Unfähigkeit, die Natur unseres eigenen Denkens zu verstehen. Hofstadters Grenzgänge durch das menschliche Bewusstsein und die Welt der “denkenden” Maschinen sind eng verknüpft mit den revolutionären Entdeckungen des Mathematikers Kurt Gödel, mit den Möglichkeiten der Sprache, mathematischen Systemen, Computerprogrammen oder menschlichen Artefakten, denen es gelingt, in einer unendlichen Spiegelung ihrer selbst über sich selbst zu sprechen.

Englische Taschenbuchausgabe: Basic Books, 1999, ISBN 0465026567.

Deutsche Übersetzung bei Klett-Cotta, 2001, ISBN 3608943382.

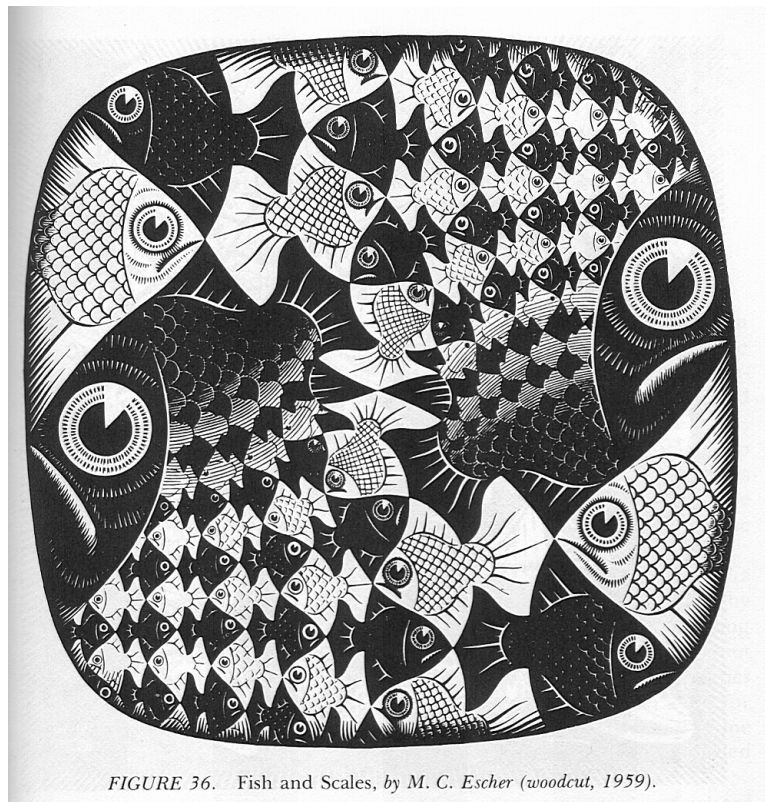


FIGURE 36. Fish and Scales, by M. C. Escher (woodcut, 1959).