Prof. Dr. V. Strehl
Informatik 8

29. November 2004

Übungen zur Theoretische Informatik 3 WS 2004/05

Um etwas zu lernen, muss man es ausführen. Auch wenn du denkst, dass du etwas kannst: du hast keine Gewissheit, solange du es nicht ausprobierst.
SOPHOKLES

- **Aufgabe 24: Verhalten der Lösungen von divide-and-conquer-Rekursionen**

  1. Bestimmen Sie das Θ-Verhalten der Lösungen der folgenden Rekursionsgleichungen
     (a) $T(n) = 8 \cdot T(n/3) + n^2$
     (b) $T(n) = 9 \cdot T(n/3) + n$
     (c) $T(n) = 9 \cdot T(n/3) + n^2$
     (d) $T(n) = 10 \cdot T(n/3) + n^2$
  2. Zeigen Sie, dass die Lösung der Rekursion $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \log n$ das Verhalten $T(n) \in \Theta(\log n \log\log n)$ hat.
     Hinweis: Das ist leichter, als man beim ersten Hinsehen denkt. Versuchen Sie die Substitution $m = \log n$. Vernachlässigen Sie grosszügig die Rundungseffekte.

- **Aufgabe 25: Quickselect**

  Man kann die Idee von `quicksort` und dessen Prozedur `partition` dazu benutzen, einen Algorithmus `quickselect` konstruieren, der für ein Feld A der Länge n und eine Zahl k mit $1 \leq k$
  leqn bei Aufruf von `quickselect`(A, k) das k-grösste Element von A zurückgibt – ohne A vollständig zu sortieren!

  1. Formulieren Sie `quickselect` in pseudocode und zeigen Sie, dass die Anzahl der benötigten Vergleichsoperationen im *worst-case* quadratisch mit n wächst.
  2. Bezeichnet $\overline{v}(n, k)$ die mittlere Anzahl von Vergleichen von `quickselect`(A, k) im Permutationsmodell und $\overline{v}(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \overline{v}(n, k)$, so wird man (in Analogie zur Situation bei `quicksort`) auf die Rekursions(un)gleichung

     $$\overline{v}(n) \leq (n-1) + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \max\{\overline{v}(k-1), \overline{v}(n-k)\}$$

     geführt, wobei verständlicherweise $\overline{v}(0) = \overline{v}(1) = 0$.
     Erläutern Sie diese Ungleichung und zeigen Sie, dass sich daraus das asymptotische Verhalten $\overline{v}(n) \in O(n)$ ergibt.

- **Aufgabe 26: Multiplikation von Polynomen: klassisch, Karatsuba und hybrid**

  Es bezeichne

  – m_n bzw. k_n die maximale Anzahl der arithmetischen Operationen (Additionen, Multiplikationen) im Koeffizientenbereich für die Multiplikationen von zwei Polynomen vom Grad $< 2^n$ bei Verwendung des klassischen bzw. des KARATSUBA-Verfahrens

1. Zeigen Sie
$$m_{n+1} = 4 \cdot m_n + 4 \cdot 2^n - 3 \quad (n \geq 0), m_0 = 1$$
und lösen Sie diese Rekursion.
2. Zeigen Sie
$$k_{n+1} = 3 \cdot k_n + 8 \cdot 2^n \quad (n \geq 0), k_0 = 1$$
und lösen Sie diese Rekursion.
3. Für welche Werte von n gilt $m_n < k_n$?
4. (optional) Ein hybrider Multiplikationsalgorithmus für Polynome berücksichtigt, dass für Polynome kleinen Grades die klassische Multiplikation weniger Operationen im Koeffizientenbereich erfordert als die KARATSUBA-Multiplikation, d.h sobald die bei der KARATSUBA-Rekursion auftretenden Polynome einen Grad $< 2^{n_0}$ erreichen, wird mit klassischer Multiplikation weitergerechnet.
   Bezeichne $h_n^{(n_0)}$ die Anzahl der arithmetischen Operationen im Koeffizientenbereich für die Multiplikatione von zwei Polynomen vom Grad $< 2^n$. Zeigen Sie
$$h_n^{(n_0)} = c_{n_0} \cdot 3^n - 8 \cdot 2^n \quad (n > n_0)$$
   mit einer Konstanten c_{n_0}. Geben Sie diese Konstante explizit an. Für welches n_0 wird c_{n_0} minimal?
   Hinweis: Drücken Sie k_{n+d} für $d \geq 0$ mittels k_n aus.