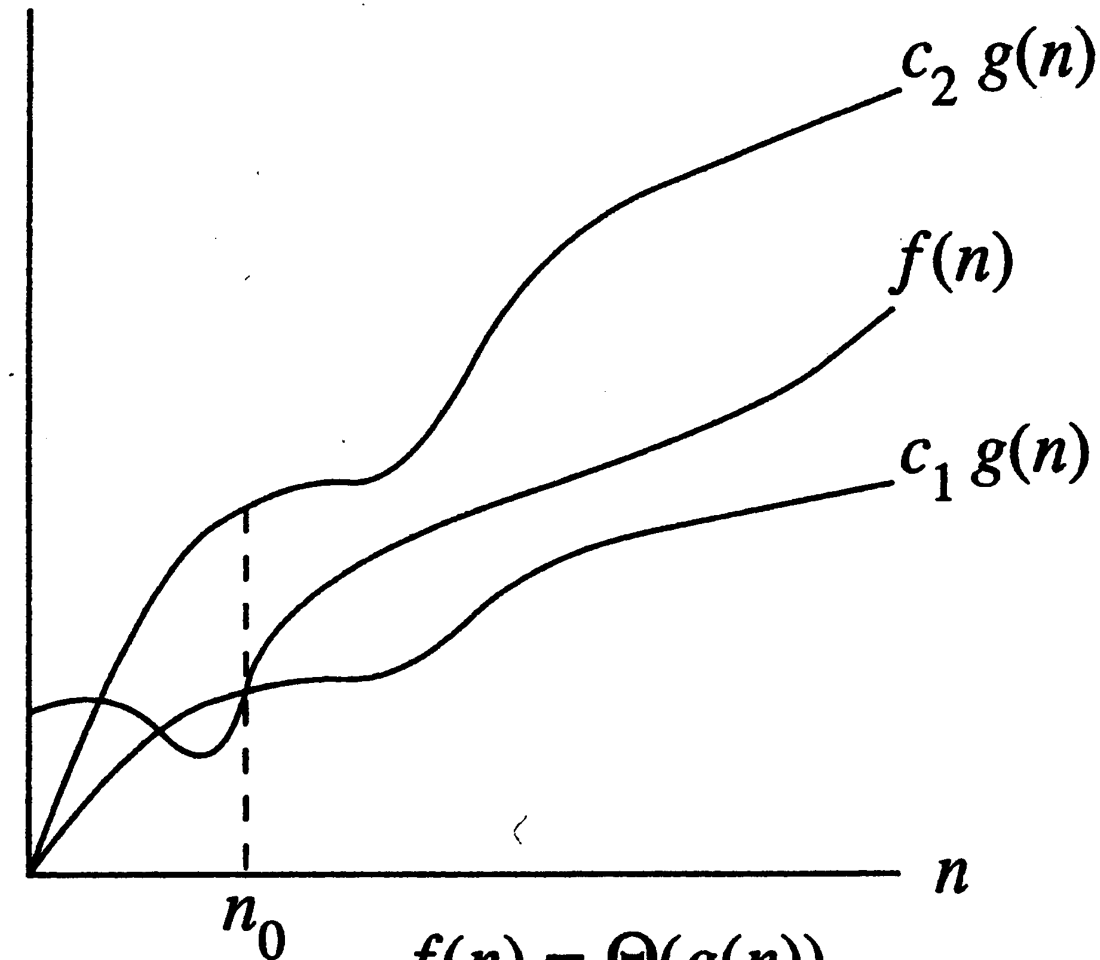
Notation für das asymptotische Verhalten von Funktionen

Vorbemerkungen:

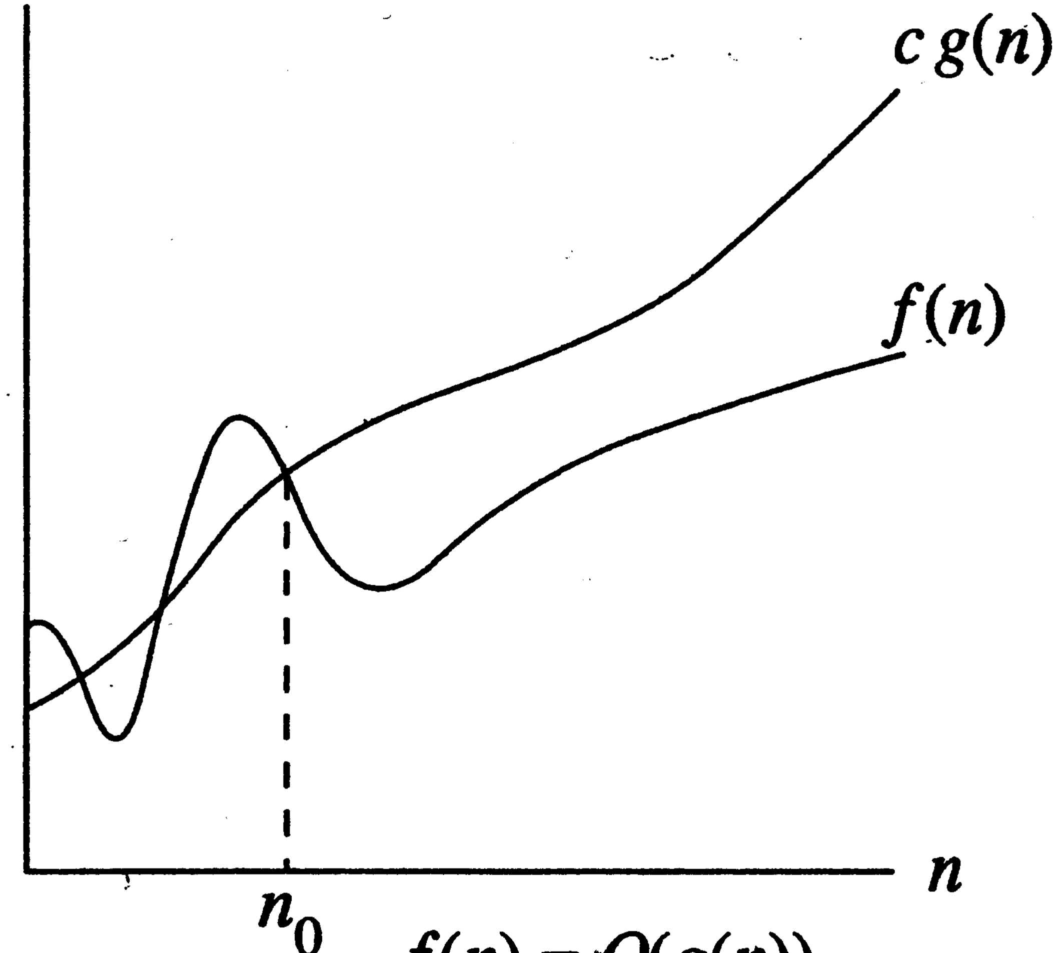
1. Aussagen über die Komplexität von Algorithmen und von Problemen sollen (in der Regel) unabhängig von speziellen Maschinenmodellen und speziellen Eigenschaften eine Implementierung, ebenso von technologischen Details
2. Bei der Untersuchung von Komplexitätsfunktionen interessiert nicht so sehr der exakte Werteverlauf einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, sondern deren "Tendenz", d.h. das Wachstumsverhalten (*asymptotisches Verhalten*) für wachsendes Argument

Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938)
Professor der Mathematik in Göttingen (1909–1933)
Wichtige Arbeiten zu Zahlentheorie und Analysis ("Analytische Zahlentheorie")

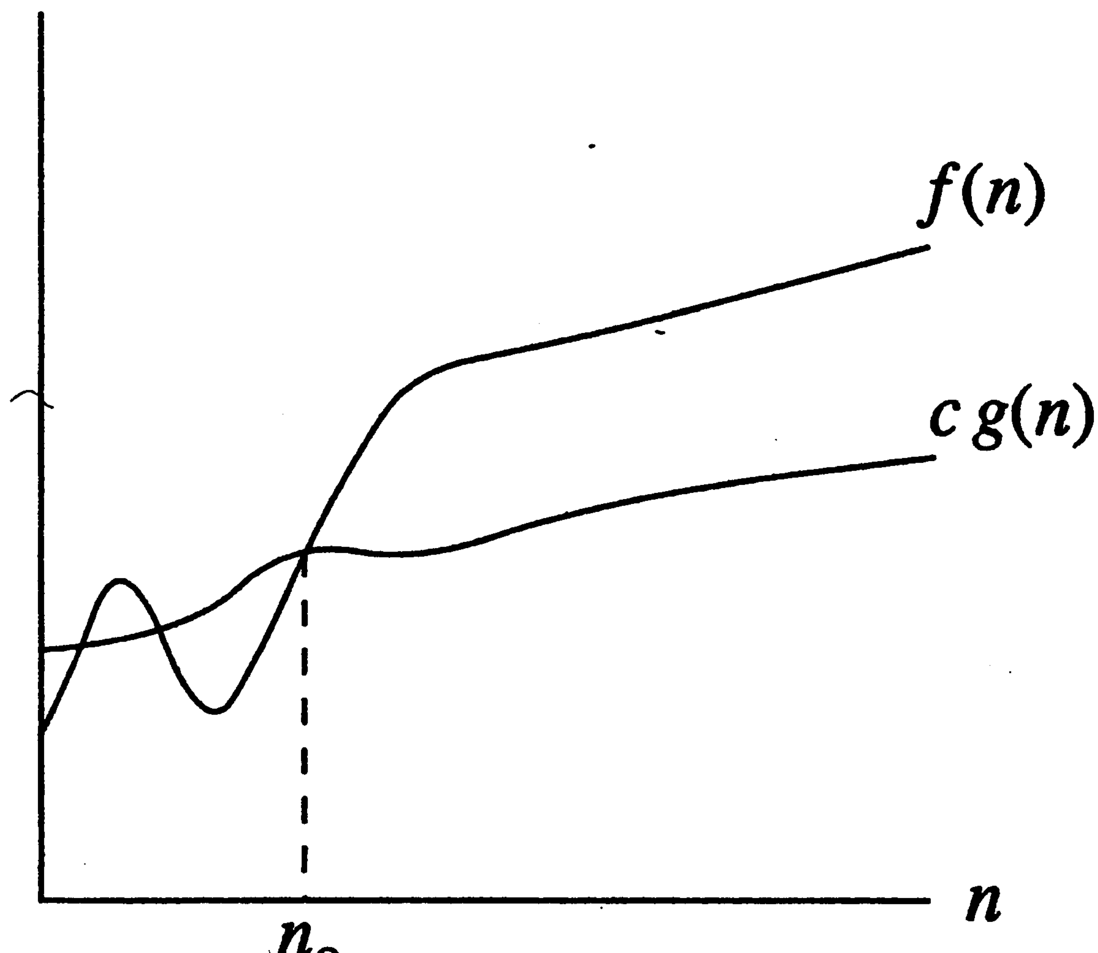
www.math.uni-goettingen.de/Personen/Bedeutende_Mathematiker/landau.html



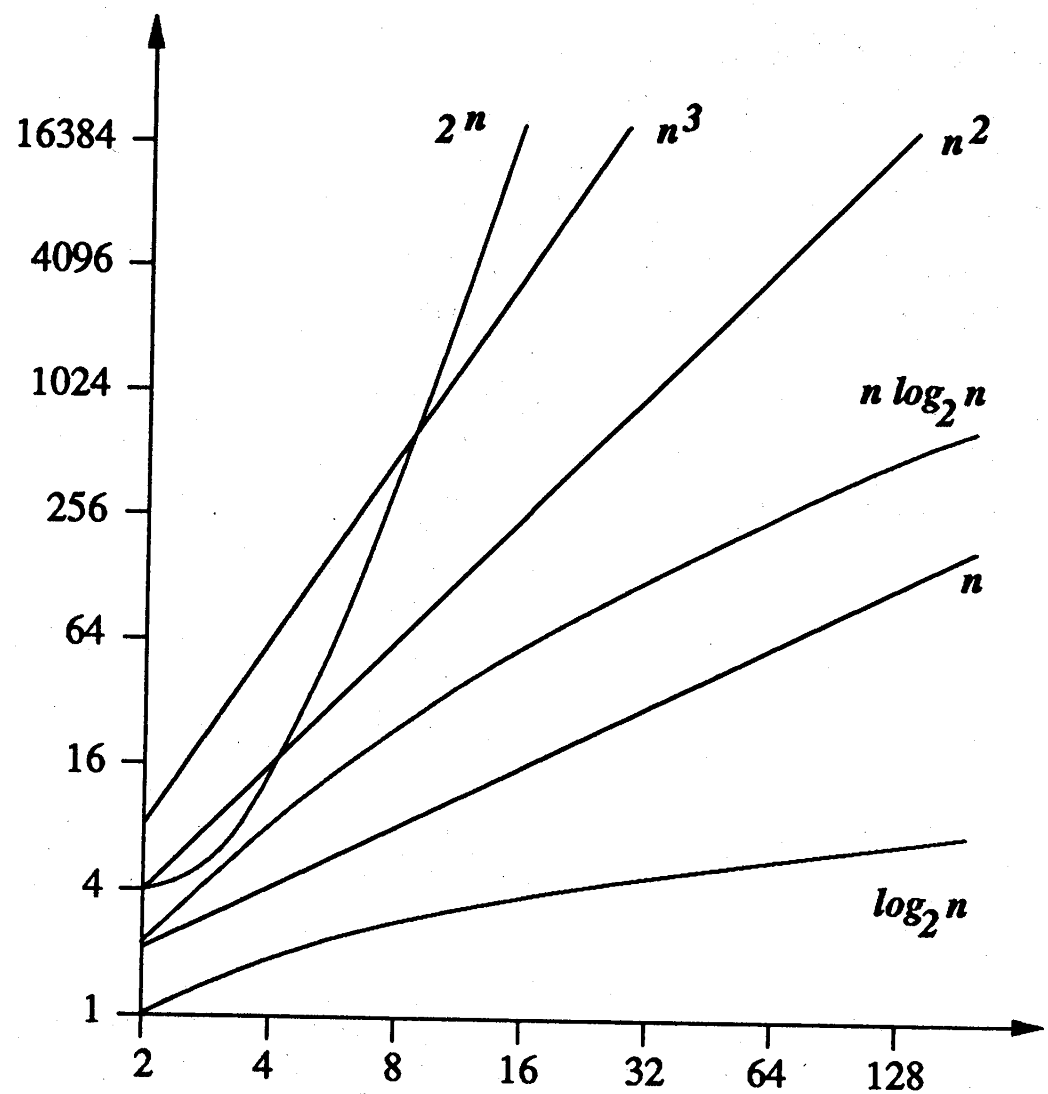
$f(n) = \Theta(g(n))$



$f(n) = O(g(n))$



$f(n) = \Omega(g(n))$


16384
4096
1024
256
64
16
4
1
2
4
8
16
32
64
128
2^n
n^3
n^2
$n \log_2 n$
n
$\log_2 n$

Landausche Symbole für asymptotisches Verhalten von Funktionen

$$O(f) = \{\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \,;\, \exists c \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : g(n) \leq c \cdot f(n) \,\}$$

$g(n) \in O(f(n))$: " $f(n)$ ist *asymptotische obere Schranke* für $g(n)$ "

$$\Omega(f) = \{\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \,;\, \exists c \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : g(n) \geq c \cdot f(n) \,\}$$

$$\Omega_\infty(f) = \{\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \,;\, \exists c \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}_{>m} : g(n) \geq c \cdot f(n) \,\}$$

$g(n) \in \Omega(f(n))$: " $f(n)$ ist *asymptotische untere Schranke* für $g(n)$ "

$$\Theta(f) = \{\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \,;\, g \in O(f) \land g \in \Omega(f) \,\}$$

$g(n) \in \Theta(f(n))$: " $f(n)$ hat *gleiche Wachstumsordnung* wie $g(n)$ "

$$o(f) \quad = \quad \left\{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \,;\, \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \right\}$$

$g(n) \in o(f(n))$: " $g(n)$ hat *kleinere Wachstumsordnung* als $f(n)$ "

$$\omega(f) \quad = \quad \left\{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \,;\, \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \right\}$$

$g(n) \in \omega(f(n))$: " $g(n)$ hat *grössere Wachstumsordnung* als $f(n)$ "

$$f(n) \sim g(n) \quad : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

"$f(n)$ und $g(n)$ sind *asymptotisch äquivalent* "

Für Funktionen $f, g\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$f \in O(g) \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in O(|g|)$$

wobei $|f| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto |f(x)|$

Ebenso für die anderen Landauschen Symbole.

Rechenregeln

1. $\forall k, \ell \in \mathbb{N} \ : \ k > \ell \Rightarrow n^\ell \in o(n^k)$
2. $\forall k, \ell \in \mathbb{N} \ : \ k > \ell \Rightarrow n^k + n^\ell \in \Theta(n^k)$
3. für Polynome $p(n) = \sum_{i=0}^{k} p_i \, n^i$ mit $p_k > 0$, ℓ eine Konstante
$$\ell \ [\geq, \leq, =, >, <] \ k \quad \Rightarrow \quad p(n) \in \ [O, \Omega, \Theta, o, \omega] \ (n^\ell)$$
4. $\forall k \in \mathbb{N} \ : \ n^k \in o(2^n)$
5. Logarithmen zu verschiedenen Basen
$$\log_a n \in \Theta(\log_b n) \quad (a, b > 1)$$
6. $\forall k \in \mathbb{N} \, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ : \ \log^k(n) \in o(n^\epsilon)$
7. $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 2^n \in o(2^{2n})$

8. $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$ und $f \in o(g) \Leftrightarrow g \in \omega(f)$
9. $f \in \Omega(g) \Rightarrow f \in \Omega_\infty(g)$
10. $f \in \Omega_\infty(g) \not\Rightarrow f \in \Omega(g)$
11. Transitivität: $f \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(h) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(h)$ für $\mathcal{O} \in \{O, \Omega, \Theta, o, \omega\}$
12. $f \in \Omega_\infty(g) \wedge g \in \Omega_\infty(h) \not\Rightarrow f \in O(h)$
13. $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g)$
14. falls g nur endlich-viele Nullstellen hat:

$$f \in O(g) \;\Leftrightarrow\; \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$$

15. falls g nur endlich-viele Nullstellen hat:

$$f \in \omega(g) \;\Leftrightarrow\; \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geq c$$

Das Wachstumsverhalten (asymptotisches Verhalten) einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bezeichnet man als

a — *konstant*, falls $f(n) \in \Theta(1)$

b — *logarithmisch*, falls $f(n) \in \Theta(\log(n))$

c — *polylogarithmisch*, falls $f(n) \in O(\log^k(n))$ für ein $k \in \mathbb{N}$

d — *linear*, falls $f(n) \in \Theta(n)$

e — *quadratisch*, falls $f(n) \in \Theta(n^2)$

f — *polynomiell*, falls $f(n) \in O(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$

g — *superpolynomiell*, falls $f(n) \in \omega(n^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

h — *subexponentiell*, falls $f(n) \in o(2^{cn})$ für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$

i — *exponentiell*, falls $f(n) \in O(2^{cn})$ für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$

Häufig in der Informatik:

Abschätzung des Wachstumsverhaltens von Funktionen $f(n)$, die gegeben sind durch

- Summen, wie z.B.

$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$	$\log n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$
harmonische Zahlen	Potenzsummen	Fakultäten

- Rekursionsgleichungen, wie z.B.

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$ mergesort

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$$ divide-and-conquer

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T(i-1) + T(n-i)$$ quicksort

drei wichtige Beispiele

- harmonische Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

$$H_n \sim \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O(1/n^2)$$

wobei $\gamma = 0.57721\ldots$ (EULERsche Konstante), also $H_n \in \Theta(\log n)$

- Potenzsummen $S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k$ für $k > -1$

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \le S_k(n) \le n^{k+1} \quad \text{also} \quad S_k(n) \in \Theta(n^{k+1})$$

- Fakultäten: STIRLINGs Formel

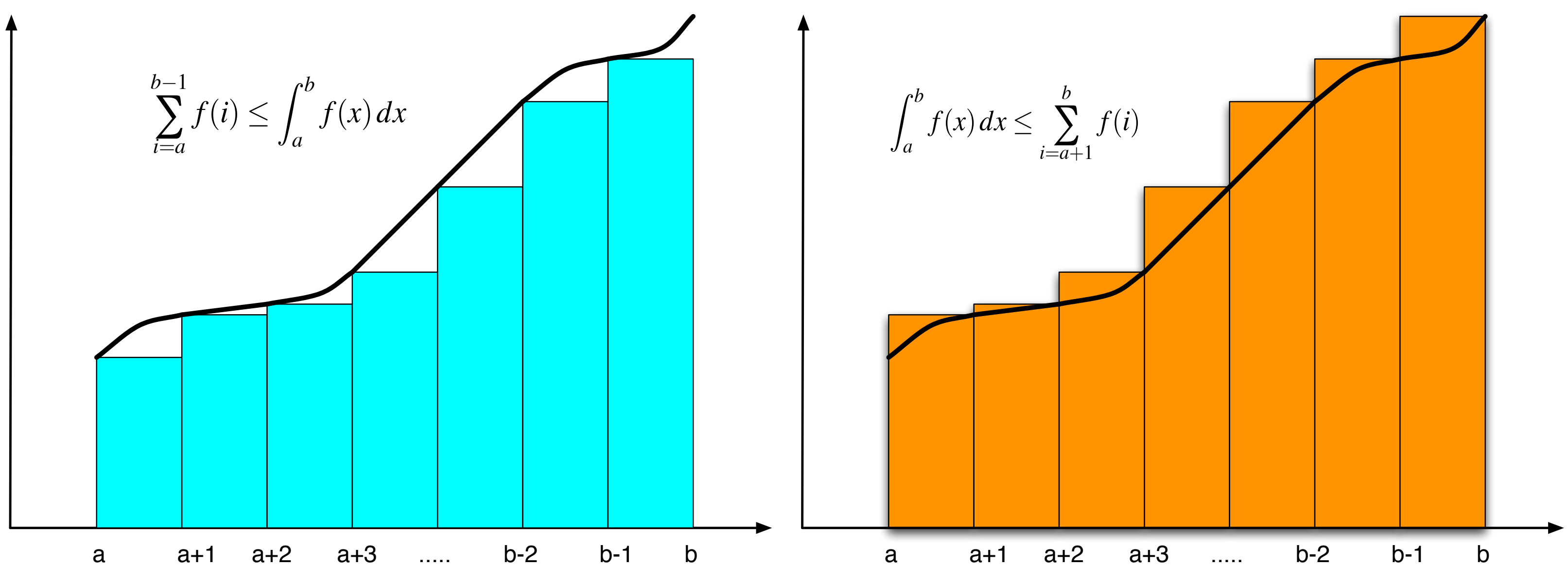
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(1/n^3)\right)$$

also $\log n! \in \Theta(n \cdot \log n)$

Wichtiges Hilfsmittel zum Abschätzen von Summationen: Integration

Ist $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend, $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i) \;\leq\; \int_a^b f(x)dx \;\leq\; \sum_{i=a+1}^{b} f(i)$$



Anwendung auf die drei wichtigen Beispiele

- harmonische Zahlen H_n
  mit $f : [1, n+1] \to \mathbb{R} : x \to 1/x$ ergibt sich

$$\ln(n+1) \;\leq\; H_n \leq\; 1 + \ln n$$

und somit $H_n \in \Theta(\log n)$

- Potenzsummen $S_k(n)$ mit $k > -1$
  mit $f : [0, n] \to \mathbb{R} : x \to x^k$ ergibt sich

  $$S_k(n) \geq \frac{n^{k+1}}{k+1} \quad \text{also } S_k(n) \in \Omega(n^{k+1})$$

  Zusammen mit $S_k(n) \leq n \cdot n^k = n^{k+1}$ ergibt sich $S_k(n) \in \Theta(n^{k+1})$

- Fakultäten
  mit $f : [1, n] \to \mathbb{R} : x \to \ln x$ ergibt sich

  $$\ln n! = \sum_{i=2}^{n} \ln i \geq \big[x \cdot \ln x - x\big]_1^n = n \cdot \ln n - n + 1 \in \Omega(n \cdot \ln n)$$

  Wegen $\ln n! \leq n \cdot \ln n$ ist $\ln n! \in O(n \cdot \ln n)$ und somit $\ln n! \in \Theta(n \cdot \log n)$

Zur Abschätzung der Fakultäten:

$$n \cdot \ln n - n \;\leq\; \ln n! \;<\; (n+1)\ln(n+1) - n \qquad (n > 1)$$

ergibt

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \;<\; n! \;<\; e \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

und wegen $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \sim e \;\; \text{also} \;\; (n+1)^{n+1} \sim e \cdot n^{n+1}$$

Somit ist

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \;<\; n! \;<\; n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirling's Formel macht das noch präziser:

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi \cdot n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

oder

$$\log_2 n! \;=\; n \cdot \log_2 n - 1.44\ldots \cdot n + o(n)$$

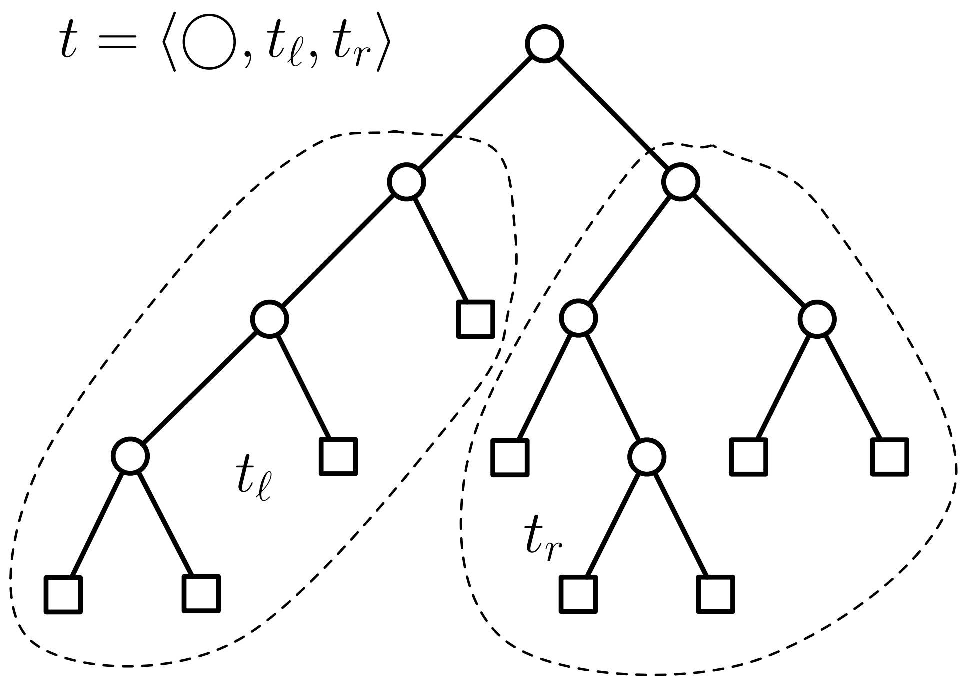
Eine Anwendung der Stirling-Formel:

Wieviele verschiedene Binärbäume mit n inneren Knoten gibt es?

BNF-Grammatik für Binärbäume:

$$B = \square + \langle \bigcirc, B, B \rangle$$

$\square$=äusserer Knoten, $\bigcirc$ = innerer Knoten



c_n = Anzahl der Binärbäumen mit n inneren Knoten

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
c_n	1	1	2	5	14	42	132	428	1430	4862	16796	$\cdots$

$$c_{100} = 896519947090131496687170070074100632420837521538745909320$$

$$\begin{gathered} c_{1000} = \\ 2046105521468021692642519982997827217179245642339 0 \\ 5797584453809957217601019189186396496802615645375 2 \\ 4490157505694285950973181636343701546373806668828 8 \\ 6375203359653243390929717431080443509007504772912 9 \\ 7314225320935212694683984479674769763853760010063 7 \\ 9188193265697309820830215380570877111762857779092 7 \\ 5869648636874856805956580057673173655666887003493 9 \\ 4465016415339691092703740630179905258466361101689 7 \\ 2728933055321162921432710371407187516258398120726 8 \\ 2464343153792956281748582435751481498598087586998 6 \\ 0392157752365747777575889998795401264103387064066 5 \\ 44465166024602431818410904686424473200196202912 0 \end{gathered}$$

Die Zahlen c_n heissen CATALAN-Zahlen, zur Ehre von

Eugene Charles Catalan (1814-1894)
belgischer Mathematiker, Schüler von Liouville an der Ecole Polytechnique
wegen linksextremer politischer Aktivitäten keine akademische Karriere
Lehrer in Chalons-sur-Marne
Beiträge zur Zahlentheorie

der zeigte:

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

Wie gross ist c_n?

Einsetzen der $\textsc{Stirling}$-Approximation von $n!$ ergibt

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{(n+1)\cdot\sqrt{\pi n}} \in \Theta(\frac{4^n}{n^{3/2}})$$