

Permutationen und Inversionen

- $L = [L_1, L_2, \dots, L_n]$ Liste von Elementen einer totalgeordneten Menge
- Indexpaar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ ist *Inversion* von L , falls $L_i > L_j$
- Beispiel: $[101, 115, 30, 63, 47, 20]$ hat 12 Inversionen:
 $(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$
- $\text{inv}(L)$ = Anzahl der Inversionen von L
 ist ein Maß für die "(Un)Sortiertheit" der Liste L
 - $\text{inv}([1, 2, 3, \dots, n-1, n]) = 0$
 - $\text{inv}([n, n-1, n-2, \dots, 2, 1]) = \binom{n}{2}$
 - wie groß ist $\text{inv}(\sigma)$ für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ im Mittel?

1

$n = 1$

σ	$\ell(\sigma)$	$\text{inv}(\sigma)$	$\text{lrm}(\sigma)$
1	0	0	1

$n = 2$

σ	$\ell(\sigma)$	$\text{inv}(\sigma)$	$\text{lrm}(\sigma)$
1 2	0 0	0	2
2 1	0 1	1	1

$n = 3$

σ	$\ell(\sigma)$	$\text{inv}(\sigma)$	$\text{lrm}(\sigma)$
1 2 3	0 0 0	0	3
1 3 2	0 0 1	1	2
2 1 3	0 1 0	1	2
2 3 1	0 0 2	2	2
3 1 2	0 1 1	2	1
3 2 1	0 1 2	3	1

3

Inversionsvektoren

$$\underbrace{\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n]}_{\in \mathfrak{S}_n} \mapsto \underbrace{\ell(\sigma) = [\ell_1(\sigma), \ell_2(\sigma), \ell_3(\sigma), \dots, \ell_n(\sigma)]}_{\ell_j(\sigma) = \#\{i < j; \sigma_i > \sigma_j\}}$$

Beispiel:

$$\ell([5, 3, 2, 4, 6, 1]) = [0, 1, 2, 1, 0, 5]$$

- $\ell(\sigma) = (\ell_1(\sigma), \dots, \ell_n(\sigma))$ ist der *Inversionsvektor* ("Lehmer-Code") von σ
- es gilt $0 \leq \ell_j(\sigma) < j$ ($1 \leq j \leq n$)
- $\mathcal{L}_n := \{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n); 0 \leq \ell_j(\sigma) < j \text{ (} 1 \leq j \leq n)\}$
- $\mathcal{L}_n = [0..0] \times [0..1] \times [0..2] \times \dots \times [0..n-1]$, $\#\mathcal{L}_n = n!$
- $\sigma \mapsto \ell(\sigma)$ ist eine Bijektion zwischen \mathfrak{S}_n und \mathcal{L}_n
 Wie sieht die Umkehrabbildung aus?
- $\text{inv}(\sigma) = \|\ell(\sigma)\| = \ell_1(\sigma) + \dots + \ell_n(\sigma)$, $\text{lrm}(\sigma) = \#_0 \ell(\sigma)$

2

$n = 4$

σ	$\ell(\sigma)$	$\text{inv}(\sigma)$	$\text{lrm}(\sigma)$	σ	$\ell(\sigma)$	$\text{inv}(\sigma)$	$\text{lrm}(\sigma)$
1 2 3 4	0 0 0 0	0	4	3 1 2 4	0 1 1 0	2	2
1 2 4 3	0 0 0 1	1	3	3 1 4 2	0 1 0 2	3	2
1 3 2 4	0 0 1 0	1	3	3 2 1 4	0 1 2 0	3	2
1 3 4 2	0 0 0 2	2	3	3 2 4 1	0 1 0 3	4	2
1 4 2 3	0 0 1 1	2	2	3 4 1 2	0 0 2 2	4	2
1 4 3 2	0 0 1 2	3	2	3 4 2 1	0 0 2 3	5	2
2 1 3 4	0 1 0 0	1	3	4 1 2 3	0 1 1 1	3	1
2 1 4 3	0 1 0 1	2	2	4 1 3 2	0 1 1 2	4	1
2 3 1 4	0 0 2 0	2	3	4 2 1 3	0 1 2 1	4	1
2 3 4 1	0 0 0 3	3	3	4 2 3 1	0 1 1 3	5	1
2 4 1 3	0 0 2 2	4	2	4 3 1 2	0 1 2 2	5	1
2 4 3 1	0 0 1 3	4	2	4 3 2 1	0 1 2 3	6	1

4

Die Statistiken lrm und inv für Permutationen

– Häufigkeiten

$$s_{n,k} = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \text{lrm}(\sigma) = k\} = \#\{\ell \in \mathcal{L}_n; \#_0 \ell = k\} \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$i_{n,k} = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \text{inv}(\sigma) = k\} = \#\{\ell \in \mathcal{L}_n; \|\ell\| = k\} \quad (0 \leq k \leq \binom{n}{2})$$

– “erzeugende Polynome” für die Statistiken

$$s_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{lrm}(\sigma)} = \sum_{\ell \in \mathcal{L}_n} x^{\#_0 \ell} = \sum_{k=1}^n s_{n,k} x^k$$

$$i_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{inv}(\sigma)} = \sum_{\ell \in \mathcal{L}_n} x^{\|\ell\|} = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} i_{n,k} x^k$$

— Beispiele

$$s_4(x) = 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4$$

$$i_4(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

5

Beweise für die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} s_{n+1}(x) &= \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) \in \mathcal{L}_{n+1}} x^{\#_0(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})} \\ &= \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathcal{L}_n, \ell_{n+1} \in [0..n]} x^{\#_0(\ell_1, \dots, \ell_n) + \delta_{\ell_{n+1}, 0}} \\ &= \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathcal{L}_n} x^{\#_0(\ell_1, \dots, \ell_n)} \cdot \sum_{a \in [0..n]} x^{\delta_{a,0}} \\ &= s_n(x) \cdot (x + n) \end{aligned}$$

7

– rekursive Struktur von \mathcal{L}_n : $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n \times [0..n]$

– rekursives Verhalten von lrm und inv

$$\begin{aligned} \#_0(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \ell_{n+1}) &= \#_0(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) + \delta_{\ell_{n+1}, 0} & \#_0(\epsilon) &= 0 \\ \|(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \ell_{n+1})\| &= \|(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)\| + \ell_{n+1} & \|\epsilon\| &= 0 \end{aligned}$$

– Rekursion der Polynome

$$s_{n+1}(x) = s_n(x) \cdot (x + n) \quad s_0(x) = 1$$

$$i_{n+1}(x) = i_n(x) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^n) \quad i_0(x) = 1$$

– Produktdarstellung der Polynome

$$s_n(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) \quad (n \geq 0)$$

$$i_n(x) = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) \cdots (1+x+\dots+x^{n-1}) \quad (n \geq 0)$$

6

$$\begin{aligned} i_{n+1}(x) &= \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) \in \mathcal{L}_{n+1}} x^{\|(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})\|} \\ &= \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathcal{L}_n, \ell_{n+1} \in [0..n]} x^{\|(\ell_1, \dots, \ell_n)\| + \ell_{n+1}} \\ &= \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathcal{L}_n} x^{\|(\ell_1, \dots, \ell_n)\|} \cdot \sum_{a \in [0..n]} x^a \\ &= i_n(x) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^n) \end{aligned}$$

8

Erwartungswert (Mittelwert) für l_{rm} auf \mathfrak{S}_n

- gesucht:

$$\frac{1}{n!} \sum_k k \cdot s_{n,k} = \frac{s'(1)}{s(1)}$$

- aus Rekursion: $s'_{n+1}(1) = s'_n(1) \cdot (1+n) + n!$, also

$$\frac{s'_{n+1}(1)}{s_{n+1}(1)} = \frac{s'_n(1)}{s_n(1)} + \frac{1}{n+1}$$

- Folgerung:

$$\frac{s'_n(1)}{s_n(1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$$

Erwartungswert (Mittelwert) für i_{nv} auf \mathfrak{S}_n

- gesucht:

$$\frac{1}{n!} \sum_k k \cdot i_{n,k} = \frac{i'(1)}{i(1)}$$

- aus Rekursion: $i'_{n+1}(1) = i'_n(1) \cdot (1+n) + n! \cdot (1+2+\dots+n)$, also

$$\frac{i'_{n+1}(1)}{i_{n+1}(1)} = \frac{i'_n(1)}{i_n(1)} + \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

- Folgerung:

$$\frac{i'_n(1)}{i_n(1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$