Resolution und 2-SAT

Klausel:
Menge (= Disjunktion) von AL-Literalen

AL-Formel in Klauselform:
Menge (= Konjunktion) von Klauseln $\simeq$ POSE

$\Box$ = leere Klausel = leere Disjunktion = FALSE

Resolution:
Generierung von neuen Klauseln aus vorhandenen Klauseln mittels der Regel

$$\frac{\{x\} \cup \alpha \quad , \quad \{\overline{x}\} \cup \beta}{\alpha \cup \beta}$$

Hierbei sind α, β beliebige (auch leere) Klauseln.

Ist F AL-Formel (in Klauselform) und α Klausel:

$$F \vdash \alpha \; : \; \begin{cases} \alpha \text{ lässt sich aus } F \text{ in endlich vielen} \\ \text{Resolutionsschritten erzeugen} \end{cases}$$

Theorem:

$$F \text{ unerfüllbar} \iff F \vdash \Box$$

Beweis der Korrektheit ($\Longleftarrow$):
Resolutionsschritte erhalten die Erfüllbarkeit; die leere Klausel $\Box$ ist aber unerfüllbar.

Beweis der Adäquatheit (Vollständigkeit, $\Longrightarrow$):
$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$F_{x_1=0} = F(0, x_2, \ldots, x_n)$ geht aus F hervor, indem man:
– Klauseln, die $\overline{x_1}$ enthalten, eliminiert
– in Klauseln, die x_1 enthalten, x_1 eliminiert
– alle übrigen Klauseln unverändert lässt

$F_{x_1=1} = F(1, x_2, \ldots, x_n)$ wird analog definiert

Beachte:

$$F \equiv (x_1 \vee F_{x_1=0}) \wedge (\overline{x_1} \vee F_{x_1=1})$$

Insbesondere:

$$F \text{ erfüllbar} \iff F_{x_1=0} \vee F_{x_1=1} \text{ erfüllbar}$$

Konsequenz:

$$F \text{ unerfüllbar} \implies F_{x_1=0} \text{ und } F_{x_1=1} \text{ unerfüllbar}$$

Induktion:

$$F \text{ unerfüllbar} \implies F_{x_1=0} \vdash \Box \text{ und } F_{x_1=1} \vdash \Box$$

Einsetzen von x_1 bzw, $\overline{x_1}$ in die Klauseln, aus denen diese Literale vorher (bei Konstruktion von $F_{x_1=0}$ bzw. $F_{x_1=1}$) entfernt wurden, liefert

aus $F_{x_1=0} \vdash \Box$: $\quad F \vdash \Box$ oder $F \vdash \{x_1\}$
aus $F_{x_1=1} \vdash \Box$: $\quad F \vdash \Box$ oder $F \vdash \{\overline{x_1}\}$

Zusammen also in jedem Fall

$$F \vdash \Box$$

$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Instanz von 2-SAT, d.h. AL-Formel in Klauselform mit ≤ 2 Literalen pro Klausel

$G_F = (V, E)$: gerichteter Graph mit

Knoten $V = \{0,1\} \cup \{x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots, x_n, \overline{x_n}\}$

und den Kanten:

$$\text{für jedes Literal } \alpha \; : \; \begin{cases} \alpha \to 1 \\ 0 \to \alpha \end{cases}$$

$$\text{für jede } F\text{-Klausel } \{\alpha\} \; : \; \begin{cases} \overline{\alpha} \to 0 \\ 1 \to \alpha \end{cases}$$

$$\text{für jede } F\text{-Klausel } \{\alpha, \beta\} \; : \; \begin{cases} \overline{\alpha} \to \beta \\ \overline{\beta} \to \alpha \end{cases}$$

Resolution

$$\Big\{\{\alpha,\beta\},\{\overline{\beta},\gamma\}\Big\} \vdash \{\alpha,\gamma\}$$

bedeutet im Graphen G_F das Verketten von Kanten bzw. Wegen, d.h. für alle $\alpha,\beta \in V$ (incl. 0 und 1) gilt

$$F \vdash \{\alpha,\beta\} \iff \begin{cases}\text{es gibt einen Weg in } G_F \\ \text{von } \overline{\alpha} \text{ nach } \beta \text{ (und somit} \\ \text{auch von } \overline{\beta} \text{ nach } \alpha)\end{cases}$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- F ist unerfüllbar
- $F \vdash \Box$
- es ex. $\alpha \in V$ mit $F \vdash \{\alpha\}$ und $F \vdash \{\overline{\alpha}\}$
- es gibt ein $\alpha \in V$ mit einem Weg von α nach $\overline{\alpha}$ und einem Weg von $\overline{\alpha}$ nach α in G_F
- es gibt ein $\alpha \in V$ mit

  $$\overline{\alpha} \to \ldots \to 0 \to \alpha \to \ldots \to 0 \to \overline{\alpha}$$

  bzw.

  $$1 \to \ldots \to \alpha \to 1 \to \ldots \to \overline{\alpha} \to 1$$

- für alle $\alpha \in V$ gilt

  $$\overline{\alpha} \to \ldots \to 0 \to \alpha \to \ldots \to 0 \to \overline{\alpha}$$

  bzw.

  $$1 \to \ldots \to \alpha \to 1 \to \ldots \to \overline{\alpha} \to 1$$

- G_F ist stark zusammenhängend: zu je zwei Literalen $\alpha,\beta \in V$ gibt es einen Weg von α nach β

Ordnungstheoretische Interpretation:

Die Relation $\leq_F$ mit

$$\overline{\alpha} \leq_F \beta \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\beta} \leq_F \alpha \quad\Leftrightarrow\quad F \vdash \{\alpha,\beta\}$$

ist eine Präordnung auf V.

Die induzierte Äquivalenzrelation $\equiv_F$

$$\alpha \equiv_F \beta \quad\iff\quad \alpha \leq_F \beta \;\text{ und }\; \beta \leq_F \alpha$$

fasst Literale zu Klassen

$$[\alpha]_F = \{\beta\,;\, \beta \equiv_F \alpha\}$$

zusammen, die in jeder erfüllenden Bewertung von F den gleichen Wahrheitswert erhalten müssen. Diese Äquivalenzklassen sind die (starken) Zusammenhangskomponenten des Graphen G_F. Insbesondere müssen alle Literale in $[1]_F$ "wahr" und alle Literale in $[0]_F$ "falsch" sein.

Es gilt

$$F \text{ unerfüllbar} \quad\Leftrightarrow\quad [0]_F = [1]_F$$