

Existenz von Lösungen von Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

für Polynome $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Die wesentlichen Parameter sind

- Die Anzahl n der Variablen
- Der Grad d der Polynome
- Der Lösungsraum \mathbb{R} oder \mathbb{Z}

\mathbb{R}	# Variable = 1	# Variable ≥ 2
Grad = 1	banal	Lineare Gleichungssysteme, effizient entscheidbar!
Grad ≥ 2	Reelle Nullstellen von Polynomen in einer Var., effizient entscheidbar!	Aufwendige Theorie und Algorithmen ("Gröbnerbasen"), entscheidbar, aber i.a. nicht mehr effizient!
\mathbb{Z}	# Variable = 1	# Variable ≥ 2
Grad = 1	banal	Lineare Gleichungssysteme, effizient entscheidbar mittels Euklid!
Grad ≥ 2	Ganzzahlige Nullstellen von Polynomen in einer Var., effizient entscheidbar!	i.a. unentscheidbar! HILBERT's 10. Problem (MATJASEVIC)

Existenz von Lösungen von Ungleichungssystemen (in mehreren Variablen)

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 \\
 &\vdots \\
 f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0
 \end{aligned}$$

für Polynome $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Die wesentlichen Parameter sind

- Der Grad d der Polynome
- Der Lösungsraum \mathbb{R} oder \mathbb{Z}

	\mathbb{R}	\mathbb{Z}
Grad = 1	Lineare Optimierung (LP), effizient entscheidbar, Algorithmen von KHACHIAN und KARMARKAR	Ganzzahlige lineare Optimierung, (ILP): NP-vollständiges Problem!
Grad ≥ 2	entscheidbar (TARSKI), aber nicht mehr effizient!	unentscheidbar wg. HILBERT's 10. Problem