Fibonacci-Zahlen als Beispiel

Für $\mathbf{f} = (f_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ gilt

- Rekursion

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \; (n \geq 0), f_0 = 0, f_1 = 1$$

- erzeugende Funktion

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

- Partialbruchzerlegung mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\widehat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathbf{f}(z) = \frac{z}{(1 - \phi \cdot z)(1 - \widehat{\phi} \cdot z)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi \cdot z} - \frac{1}{1 - \widehat{\phi} \cdot z} \right)$$

- Explizite Form

$$f_n = \frac{\phi^n - \widehat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

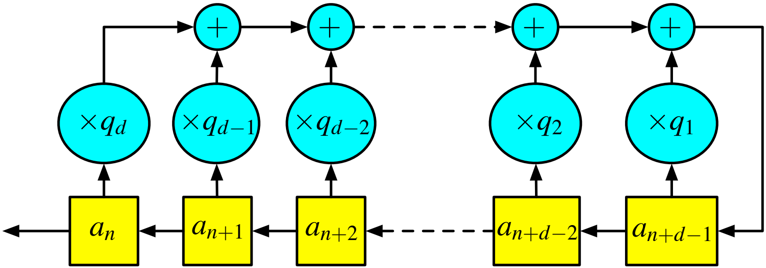
Definition

- Eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$
  - genügt einer (homogenen) linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten,
  - alias: genügt einer linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten,
  - alias: heisst *C-rekursiv*,

  wenn es $d \geq 1$ Konstanten $q_1, q_2, \ldots, q_d \in \mathbb{C}$ (wobei o.B.d.A. $q_d \neq 0$) gibt mit:

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \cdots + q_d \cdot a_n \quad (n \geq 0)$$

- Eine “Lösung” $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ ist durch ihre (frei wählbaren) d Anfangswerte $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ eindeutig bestimmt.
- Der “Lösungsraum” ist ein linearer Raum der Dimension d


+
+
+
+
$\times q_d$
$\times q_{d-1}$
$\times q_{d-2}$
$\times q_2$
$\times q_1$
a_n
a_{n+1}
a_{n+2}
a_{n+d-2}
a_{n+d-1}

Matrix-Formulierung

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+d-1} \\ a_{n+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ q_d & q_{d-1} & q_{d-2} & \dots & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+d-2} \\ a_{n+d-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ q_d & q_{d-1} & q_{d-2} & \dots & q_2 & q_1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d-2} \\ a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Warum? Wozu?

- C-rekursive Folgen begegnen einem in vielen Situationen
  - Lineare Systemtheorie
  - Sehr enger Zusammenhang mit der Theorie der regulären Sprachen (Theorem von Schützenberger)
  - Viele divide-and-conquer-Rekursionen lassen sich in C-rekursive Folgen transformieren und lösen.
  - Summationsprobleme führen auf spezielle lineare Differenzengleichungen.
- Probleme des asymptotischen Verhaltens von Lösungen $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ lassen sich "im Prinzip" exakt behandeln
- Die Theorie und die Verfahren sind ganz analog zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.
  An die Stelle der Laplace-Transformation tritt die sog. z-Transformation.

Fundamentalsatz

Für eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\mathbf{a}$ ist C-rekursiv, d.h. $\mathbf{a}$ genügt einer linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten,
  d.h. es gibt ein $d \geq 1$ Konstanten $q_1, q_2, \ldots, q_d \in \mathbb{C}$ mit
  $$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \cdots + q_d \cdot a_n \quad (n \geq 0)$$
- Die Reihe $a(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ist Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) einer echten rationalen Funktion,
  d.h. es gibt Polynome $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $Q(0) \neq 0$ und $\deg P(X) < \deg Q(X)$, so dass
  $$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

- Die Folgenglieder a_n lassen sich in Form einer "Exponentialsumme" schreiben,
  d.h. es gibt $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{C}$ und Polynome $R_1(X), \ldots, R_s(X)$, so dass

$$a_n = R_1(n) \cdot \gamma_1^n + \cdots + R_s(n) \cdot \gamma_s^n \quad (n \geq 0).$$

- Es gibt ein $d \geq 1$, so dass alle Determinanten der $(d+1) \times (d+1)$-Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+d} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \cdots & a_{n+d+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} & \cdots & a_{n+d+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+d} & a_{n+d+1} & a_{n+d+2} & \cdots & a_{n+2d} \end{bmatrix} \quad (n \geq 0).$$

  verschwinden

Genauere Formulierung

Es seien

- $q_1, q_2, \ldots, q_d \in \mathbb{C}$ mit $q_d \neq 0$,
- $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{C}$ (verschieden)
- $d_1, d_2, \ldots, d_s \in \mathbb{N}$ mit $\sum_i d_i = d$

und

$$Q(X) = 1 - q_1 X - q_2 X^2 - \cdots q_d X^d = \prod_{1 \leq i \leq s} (1 - \gamma_i \cdot X)^{d_i}$$

d.h. jedes γ_i ist Nullstelle mit Vielfachheit d_i des sog. "reziproken Polynoms" ("charakteristisches Polynom")

$$Q^R(X) = X^d \cdot Q(1/X) = X^d - q_1 X^{d-1} - q_2 X^{d-2} - \cdots - q_d$$

Für eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ sind folgende Aussagen äquivalent

- (C-rekursiv)

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \cdots + q_d \cdot a_n \quad (n \geq 0)$$

- (rationale Funktion)

$$a(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\prod_{1\leq i\leq s}(1-\gamma_i \cdot z)^{d_i}} \text{ mit } \deg P(X) < d$$

- (Partialbruchzerlegung)

$$a(z) = \sum_{1\leq i\leq s} \frac{P_i(z)}{(1-\gamma_i \cdot z)^{d_i}} \quad \text{mit} \deg P_i(X) < d_i \; (1 \leq i \leq s)$$

- Darstellung als Exponentialsumme

$$a_n = \sum_{1 \le i \le s} R_i(n) \cdot \gamma_i^n \ (n \ge 0) \text{ mit } \deg R_i(X) < d_i \ (1 \le i \le s)$$

- Algebraisch formuliert:
  a ist $\mathbb{C}$-Linearkombination der d Basisfolgen

$$\left(n^\ell \cdot \gamma_i^n \right)_{n \ge 0} \qquad (1 \le i \le s, 0 \le \ell < d_i)$$

oder

$$\left(\binom{n}{\ell} \cdot \gamma_i^n \right)_{n \ge 0} \qquad (1 \le i \le s, 0 \le \ell < d_i)$$

Zum Beweis

- (C-rekursiv) $\Leftrightarrow$ (rationale Funktion) folgt aus Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} a(z).Q(z) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(1 - q_1 z - q_2 z^2 - \cdots - q_d z^d) \\ &= p_0 + p_1 z + \cdots + p_{d-1} z^{d-1} = P(z) \end{aligned}$$

Das besagt

$$a_k - (q_1 \cdot a_{k-1} + q_2 \cdot a_{k-2} + \cdots + q_k) = p_k \quad (0 \leq k < d) \quad (1)$$

und

$$a_{n+d} - (q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \cdots + q_d \cdot a_n) = 0 \quad (n \geq 0)$$

Die $(a_k)_{0 \leq k < d}$ und die $(p_k)_{0 \leq k < d}$ bestimmen einander eindeutig durch die d Gleichungen (1).

Zum Beweis

- (rationale Funktion) $\Leftrightarrow$ (Partialbruchzerlegung)
  ist eine fundamentale Eigenschaft von Polynomen und rationalen Funktionen über einem Körper (hier $\mathbb{C}$)
  (NB: bei praktischen Berechnungen spielt Euklids Algorithmus eine Rolle!)
- (Partialbruchzerlegung) $\Leftrightarrow$ (Exponentialsumme)
  ist eine Anwendung von Newtons Binomialformel.
- (Exponentialsumme) $\Leftrightarrow$ (algebraische Formulierung)
  Vektorraum-Basis-Eigenschaft!

Erweiterung des Fundamentalsatzes

Die fundamentale Aussage lässt sich erweitern auf den Fall allgemeiner rationaler Funktionen

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit $P(0) \neq 0$, also ohne die Beschränkung $\deg P(X) < \deg Q(X)$. In dieser Situation macht man Polynomdivision

$$P(X) = L(X) \cdot Q(X) + R(X) \quad \text{mit} \quad \deg R(X) < \deg Q(X)$$

und wendet die Aussage des Fundamentalsatzes auf $R(X)/Q(X)$ an.

Das bedeutet i.w.

- Die Rekursion

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \cdots + q_d \cdot a_n$$

  gilt für $n > \deg L(X) = \deg P(X) - \deg Q(X)$
- Die Darstellung als Exponentialsumme

$$a_n = R_1(n) \cdot \gamma_1^n + \cdots + R_s(n) \cdot \gamma_s^n$$

  gilt für $n > \deg L(X) = \deg P(X) - \deg Q(X)$.

Für das asymptotische Verhalten von $(a_n)_{n \geq 0}$ ist das also ohne Belang!

Wichtige Beispielklasse

- Theorem von Schützenberger:
  $L \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprache,
  $L_n = L \cap \Sigma^n$ Menge der Wörter der Länge n aus L,
  $\ell_n = \sharp L_n$ Anzahl der Wörter der Länge n
  $\Rightarrow (\ell_n)_{n\geq 0}$ ist eine C-rekursive Folge.
- Man benötigt die erweiterte Form des Fundamentalsatzes

$$\sum_{n\geq 0} \ell_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit $Q(0) \neq 0$, ohne Bedingung an die Grade der Polynome $P(X)$ und $Q(X)$.

Alternativer Beweis

- $L \subseteq \Sigma^*$ sei reguläre Sprache, $\ell_n = \sharp L \cap \Sigma^n$
- $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ sei DFA, der L akzeptiert, $L(\mathcal{A}) = L$
- Konvention: $Q = \{1, 2, \ldots, m\}, q_0 = 1$
- $A = [\, a_{i,j} \,]_{1 \leq i,j \leq m}$ Transfer-Matrix von $\mathcal{A}$:

$$a_{i,j} = \sharp\{x \in \Sigma \,;\, \delta(i, x) = j\}$$

- Potenzen der Transfer-Matrix

$$A^n = [\, a_{i,j}^{(n)} \,]_{1 \leq i,j \leq m} \quad \text{mit} \quad a_{i,j}^{(n)} = \sharp\{w \in \Sigma^n \,;\, \delta^*(i, w) = j\}$$

- Startvektor s und Zielvektor t

$$\mathbf{s} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \quad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m) \text{ mit } t_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- In dieser Formulierung gilt

$$\ell_n = \sharp L \cap \Sigma^n = \mathbf{s} \cdot A^n \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \quad (n \geq 0), \text{ also}$$

$$\sum_{n\geq 0} \ell_n z^n = \sum_{n\geq 0} (\mathbf{s} \cdot A^n \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}}) z^n = \mathbf{s} \cdot \sum_{n\geq 0} A^n z^n \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} = \mathbf{s} \cdot (E_m - z\,A)^{-1} \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}}$$

- Der letzte Ausdruck stellt tatsächlich eine rationale Funktion dar (CRAMERsche Regel!!)
- Alternativ: verwende das Theorem von CAYLEY-HAMILTON
  - Für das charakteristische Polynom

    $$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_m - A) = \lambda^m + c_1 \lambda^{m-1} + \cdots + c_m \lambda^0$$

    einer Matrix A gilt: $\chi(A) = \mathbf{0}$ (Nullmatrix)
  - *Minimalpolynom* von A: normiertes Polynom $P(X)$ von minimalem Grad mit $P(A) = \mathbf{0}$ (eindeutig bestimmt!)
  - Jedes Polynom $P(X)$ mit $P(A) = \mathbf{0}$ ist Vielfaches des Minimalpolynoms

- Sei nun $P(X) = X^d - p_1 \cdot X^{d-1} - p_2 \cdot X^{d-2} - \cdots - p_d$ ein Polynom mit

$$P(A) = A^d - p_1 \cdot A^{d-1} - p_2 \cdot A^{d-2} - \cdots - p_d \cdot E_m = \mathbf{0}$$

- Für alle $n \geq 0$ gilt dann auch $A^n \cdot P(A) = \mathbf{0}$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{0} \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} = \mathbf{s} \cdot A^n \cdot P(A) \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{s} \cdot \left(A^{n+d} - p_1 \cdot A^{n+d-1} - \cdots - p_d \cdot A^n\right) \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{s} \cdot A^{n+d} \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} - p_1 \cdot \mathbf{s} \cdot A^{n+d-1} \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} - \cdots - p_d \cdot \mathbf{s} \cdot A^n \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \\ &= \ell_{n+d} - p_1 \cdot \ell_{n+d-1} - p_2 \cdot \ell_{n+d-2} - \cdots - p_d \cdot \ell_n \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

- Beispiel: $L \subseteq \{a,b,c\}^*$ Wörter, die keinen Faktor *aa* enthalten
  - erzeugende Funktion

$$L(z) = \sum_{n\geq 0} \ell_n z^n = \frac{1+z}{1-2z-2z^2}$$

  - Rekursion

$$\ell_{n+2} = 2\ell_{n+1} + 2\ell_n \ (n \geq 0), \ell_0 = 1, \ell_1 = 3$$

  - Faktorisierung des Nennerpolynoms $Q(z)$

$$Q(z) = 1 - 2z - 2z^2 = (1 - \alpha \cdot z)(1 - \widehat{\alpha} \cdot z)$$

mit $\alpha = 1 + \sqrt{3} = 2.732\ldots, \widehat{\alpha} = 1 - \sqrt{3} = -0.732\ldots$

- (Fortsetzung des Beispiels)
  - Partialbruchzerlegung

$$\frac{1+z}{1-2z-2z^2} = \frac{1}{\alpha-\widehat{\alpha}}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha\cdot z} - \frac{1+\widehat{\alpha}}{1-\widehat{\alpha}\cdot z}\right)$$

  - Anzahlen exakt

$$\ell_n = (\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})^n + (\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}})(1-\sqrt{3})^n$$

  - Anzahl asymptotisch

$$\ell_n \sim 1.07735\ldots\cdot(2.732\ldots)^n$$

  - Coderate

$$\lim_{\to\infty}\frac{\log_3 \ell_n}{n} = \log_3 2.732\ldots = 0.9248\ldots$$

- Beispiel: $\overline{L} \subseteq \{a, b, c\}^*$ Wörter, die den Faktor *aa* enthalten
  - erzeugende Funktion

$$\overline{L}(z) = \sum_{n \geq 0} \overline{\ell}_n z^n = \frac{1}{1-3z} - L(z) = \frac{z^2}{1-5z+4z^2+6z^3}$$

  - Rekursion

$$\overline{\ell}_{n+3} = 5\overline{\ell}_{n+2} - 4\overline{\ell}_{n+1} + 6\overline{\ell}_n \ (n \geq 0), \overline{\ell}_0 = \overline{\ell}_1 = 0, \overline{\ell}_2 = 1$$

  - Nennerpolynom

$$1 - 5z + 4z^2 + 6z^3 = (1 - 3 \cdot z)(1 - \alpha \cdot z)(1 - \widehat{\alpha} \cdot z)$$

- (Fortsetzung des Beispiels)
  - Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^2}{1-5z+4z^2+6z^3} = \frac{1}{1-3z} + \frac{1}{\alpha-\widehat{\alpha}}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha\cdot z} - \frac{1+\widehat{\alpha}}{1-\widehat{\alpha}\cdot z}\right)$$

  - Anzahl exakt

$$\overline{\ell}_n = 3^n - \ell_n = 3^n - (\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})^n - (\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}})(1-\sqrt{3})^n$$

  - Anzahl asymptotisch

$$\overline{\ell}_n \sim 3^n$$

  - Coderate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 \overline{\ell}_n}{n} = 1$$

Beispiel zum Transfermatrix-Ansatz

- $\sigma = \{a, b, c\}$, $L \subseteq \Sigma^*$: alle Wörter, die weder *aa* noch *bc* als Faktoren enthalten
- $\ell_n = \sharp L \cap \Sigma^n$, $(\ell_n)_{n \geq 0} = (1, 3, 7, 16, 36, 81, \ldots)$
- Transfermatrix für L

$$A = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- Potenzen der Transfer-Matrix

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Fortsetzung des Beispiels

- charakteristisches Polynom (auch Minimalpolynom)

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 1$$

- Rekursion

$$\ell_{n+3} = 2 \cdot \ell_{n+2} + \ell_{n+1} - \ell_n \; (n \geq 0)$$

- erzeugende Funktion

$$L(z) = \sum_{n \geq 0} \ell_n \, z^n = \frac{1+z}{1 - 2\,z - z^2 + z^3}$$

- Exponentialsumme

$$\begin{aligned} \ell_n &= -\, 0.038..(-.801..)^n - 0.375..(0.554..)^n + 1.414..(2.246..)^n \\ &\sim 1.414..(2.246..)^n \end{aligned}$$

Siehe Maple-worksheet für Details.

- Beispiel aus der Linguistik ("Autosegmentale Phonologie")
  - V_n = Verbindungsstrukturen auf n Knotenpaaren (siehe Vorlesung)
  - $v_n = \sharp V_n$, $(v_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 3, 11, 41, 153, 571, 2123, \ldots)$
  - Rekursion

$$v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n \ (n \geq 0), v_0 = 1, v_1 = 1$$

  - erzeugende Funktion

$$\sum_{n \geq 0} v_n z^n = \frac{1 - 3z}{1 - 4z + z^2}$$

- (Fortsetzung des Beispiels)
  - Partialbruchzerlegung

$$\frac{1-3z}{1-4z+z^2} = \frac{\beta-3}{\beta-\widehat{\beta}} \cdot \frac{1}{1-\beta\cdot z} - \frac{\widehat{\beta}-3}{\beta-\widehat{\beta}} \cdot \frac{1}{1-\widehat{\beta}\cdot z}$$

  mit $\beta = 2+\sqrt{3} = 3.732\ldots, \widehat{\beta} = 2-\sqrt{3} = 0.2679\ldots$
  - Anzahl exakt

$$v_n = \frac{(\beta-3)\cdot\beta^n - (\widehat{\beta}-3)\cdot\widehat{\beta}^n}{\beta-\widehat{\beta}}$$

  - Anzahl asymptotisch

$$v_n \sim \frac{\beta-3}{\beta-\widehat{\beta}^n} \cdot \beta^n = 0.211\ldots\cdot(3.732\ldots)^n$$

Siehe Maple-worksheet für Details.

- Gambler's ruin
  - Glücksspieler startet zum Zeitpunkt 0 mit n € Kapital, $0 \leq n \leq N$
  - Bei jeder Spielrunde 1 € Einsatz. Der Spieler
    – gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p und erhält 2 € zurück;
    – verliert mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ und Einsatz verfällt
    $(0 < p < 1)$
  - Ziel: Kapital N € erreichen, ohne sich vorher zu ruinieren, d.h., ohne jemals Kapitalstand 0 € zu erreichen.
  - Spielergebnisse in verschiedenen Runden sind unabhängig
  - r_n :Wahrscheinlichkeit, sich bei Start mit Kapital n € zu ruinieren — erfüllt Rekursionsgleichung

$$r_n = p \cdot r_{n+1} + q \cdot r_{n-1} \quad (0 < n < N), r_0 = 1, r_N = 0$$

  - anders geschrieben

$$r_{n+1} = \frac{1}{p} \cdot r_n - \frac{q}{p} \cdot r_{n-1}$$

- Fortsetzung von gambler's ruin
  - Rekursionspolynom

$$Q(X) = 1 - \frac{1}{p} \cdot X - \frac{q}{p} \cdot X^2 = (1 - \frac{q}{p} \cdot X)(1 - 1 \cdot X)$$

    d.h. Nullstellen sind $\lambda = \frac{q}{p}$ und 1.
  - Falls $p \neq \frac{1}{2}$, so ist $\lambda \neq 1$, Lösung hat also die Form

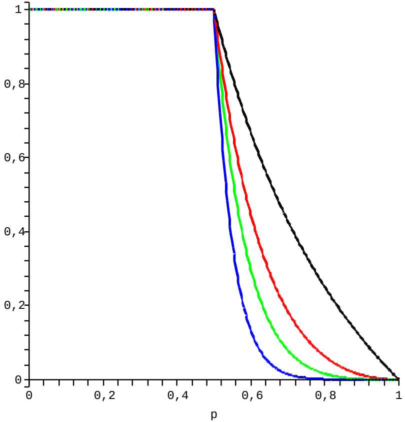
$$r_n = a \cdot \lambda^n + b$$

    Einsetzen der Randwerte $r_0 = 1$ und $r_N = 0$ und Auflösung für a, b liefert

$$r_n = \frac{\lambda^n - \lambda^N}{1 - \lambda^N}$$

- Fortsetzung von gambler's ruin
  - Falls $p = \frac{1}{2}$, so ist $\lambda = 1$ doppelte Nullstelle, Lösung hat also die Form
  $$r_n = (a + b \cdot n) \cdot \lambda^n = a + b \cdot n$$
  Einsetzen der Randwerte $r_0 = 1$ und $r_N = 0$ und Auflösung für a, b liefert
  $$r_n = 1 - \frac{n}{N}$$
  - Zahlenwerte
  $$\begin{array}{llll} p = 0.3 & N = 10 & n = 4 & \Rightarrow \quad r_4 = 0.994 \\ p = 0.5 & N = 100 & n = 20 & \Rightarrow \quad r_{20} = 0.8 \end{array}$$
  - beachte
  $$\lim_{N \to \infty} r_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq p \leq 1/2 \\ \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{falls } 1/2 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Verhalten der Ruin-Wahrscheinlichkeiten r_n für grosses N und $n = 1, 2, 3, 5$ in Abhängigkeit von p



Inhomogene (forcierte) lineare Rekursion

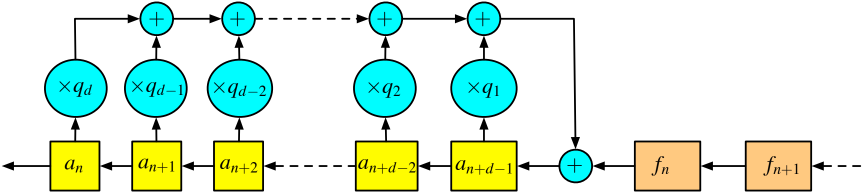
Situation: Rekursion wird durch eine "forcierende Folge" $\mathbf{f} = (f_n)_{n \geq 0}$ beeinflusst:

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \cdots + q_d \cdot a_n + f_n \quad (n \geq 0)$$

Lösung wiederum durch Anfangswerte $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ bestimmt.
Formulierung mit Potenzreihen:

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot Q(z) = P(z) + z^d \cdot \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

mit $Q(X) = 1 - q_1 X - q_2 X^2 - \cdots q_d X^d$ und $P(X)$ Polynom mit $\deg P < d$.


$+$
$+$
$+$
$+$
$\times q_d$
$\times q_{d-1}$
$\times q_{d-2}$
$\times q_2$
$\times q_1$
a_n
a_{n+1}
a_{n+2}
a_{n+d-2}
a_{n+d-1}
$+$
f_n
f_{n+1}

Äquivalente Form:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} + z^d \cdot \frac{\sum_{n\geq 0} f_n z^n}{Q(z)}$$

Lösungsmenge für inhomogene Gleichungen regelt sich nach den Prinzipien der linearen Algebra:

- allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $=$
  - allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\frac{P(z)}{Q(z)}$
  - $+$ spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $z^d \cdot \frac{\sum_{n\geq 0} f_n z^n}{Q(z)}$

Falls die forcierende Folge $\mathbf{f} = (f_n)_{n\geq 0}$ selbst eine C-rekursive Folge ist, kann man die Lösungen im inhomogenen Fall prinzipiell genauso bestimmen, wie im homogenen (nicht-forcierten) Fall:

$$\sum_{n\geq 0} f_n z^n = \frac{G(z)}{H(z)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} + z^d \cdot \frac{G(z)}{Q(z)\cdot H(z)}$$

$$= \frac{P(z)\cdot H(z) + z^d \cdot G(z)}{Q(z)\cdot H(z)}$$

Beispiel: allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n + f_n \; (n \geq 0)$$

in Anhängigkeit von Anfangswerten a_0, a_1 und $\mathbf{f}$:

- $Q(X) = 1 - 4X + 4X^2 = (1 - 2X)^2$, also $d = 2$, $s = 1$, $\lambda = 2$
- Lösung $\mathbf{a} = (a_n)$ der homogenen Gleichung: $(\mathbf{f} = \mathbf{0})$

$$a_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 2^n$$

Wegen

$$a_0 = (r_0 + r_1 \cdot 0) \cdot 2^0 = r_0$$
$$a_1 = (r_0 + r_1 \cdot 1) \cdot 2^1 = 2(r_0 + r_1)$$

schreibt sich die allgemeine homogene Lösung:

$$a_n = \left(a_0 + (\frac{a_1}{2} - a_0)n\right) \cdot 2^n = \left((1 - n)a_0 + \frac{a_1}{2}n\right) \cdot 2^n$$

Lösungen der inhomogenen (forcierten) Rekursion (Beispiele):

- $\mathbf{f} = (1, 1, 1, 1, \ldots) = (1^n)_{n \geq 0}$, also $\sum_{n \geq 0} f_n z^n = \frac{1}{1-z}$

$$z^d \cdot \frac{\sum_{n \geq 0} f_n z^n}{Q(z)} = \frac{z^2}{(1-2z)^2 \cdot (1-z)}$$

  - Lösungsansatz $a_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 2^n + s_0 \cdot 1^n$
  - $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow r_0 = -1, r_1 = \frac{1}{2}, s_0 = 1,$
  - inhomogene Lösung mit $a_0 = a_1 = 0$:

$$a_n = (-2 + n) \cdot 2^{n-1} + 1 \quad (n \geq 0)$$

  - allgemeine inhomogene Lösung

$$a_n = \left((1-n)a_0 + \frac{a_1}{2} n\right) \cdot 2^n + (-2 + n) \cdot 2^{n-1} + 1$$

  - man erkennt: $a_n \in \Theta(n \cdot 2^n)$, ausser wenn $a_1 = 2a_0 - 1$.

- $\mathbf{f} = (1, 2, 4, 8, \dots) = (2^n)_{n \geq 0}$, also $\sum_{n \geq 0} f_n z^n = \frac{1}{1-2z}$

$$z^d \cdot \frac{\sum_{n \geq 0} f_n z^n}{Q(z)} = \frac{z^2}{(1-2z)^3}$$

  - Lösungsansatz $a_n = (r_0 + r_1 \cdot n + r_2 \cdot n^2) \cdot 2^n$
  - $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow r_0 = 0, r_1 = -\frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{8}$
  - inhomogene Lösung mit $a_0 = a_1 = 0$:

$$a_n = (-n + n^2) \cdot 2^{n-3}$$

  - allgemeine inhomogene Lösung

$$a_n = \left((1-n)a_0 + \frac{a_1}{2} n\right) \cdot 2^n + (-n + n^2) \cdot 2^{n-3}$$

  - man erkennt: $a_n \in \Theta(n^2 \cdot 2^n)$

- $\mathbf{f} = (1, 3, 9, 27, \ldots) = (3^n)_{n\geq 0}$, also $\sum_{n\geq 0} f_n z^n = \frac{1}{1-3z}$

$$z^d \cdot \frac{\sum_{n\geq 0} f_n z^n}{Q(z)} = \frac{z^2}{(1-2z)^2 \cdot (1-3z)}$$

  - Lösungsansatz $a_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 2^n + s_0 \cdot 3^n$
  - $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow r_0 = -1, r_1 = -\frac{1}{2}, s_0 = 1$
  - inhomogene Lösung mit $a_0 = a_1 = 0$:

$$a_n = (-2-n) \cdot 2^{n-1} + 3^n$$

  - allgemeine inhomogene Lösung

$$a_n = \left((1-n)a_0 + \frac{a_1}{2} n\right) \cdot 2^n + (-2-n) \cdot 2^{n-1} + 3^n$$

  - man erkennt: $a_n \in \Theta(3^n)$

Wichtige Anwendung der Exponentialsummen: Asymptotik

Für C-rekursive Folgen $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ kann man das asymptotische Verhalten aus der Exponentialsumme präzise bestimmen.
Wichtiger und häufiger Spezialfall:

- Sei $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ C-rekursiv mit

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \deg P < \deg Q, \ \text{teilerfremd}$$

wobei

$$Q(X) = 1 - q_1 X - \cdots - q_d X^d = \prod_{1 \leq i \leq s} (1 - \gamma_i \cdot X)^{d_i}$$

- γ_1 heisst *dominierend*, falls $|\gamma_i| < |\gamma_1|$ $(2 \leq i \leq s)$

- In diesem Fall gilt:

$$a_n \sim c \cdot n^\delta \cdot \gamma_1^n$$

wobei sich c und δ aus der Exponentialsumme ergeben:

$$a_n = R_1(n) \cdot \gamma_1^n + R_2(n) \cdot \gamma_2^n + \cdots + R_s(n) \cdot \gamma_s^n$$

mit $\deg R_1 = \delta$, $R_1(X) = c\,X^\delta + \cdots$. Daher

$$\frac{a_n}{n^\delta \cdot \gamma_1^n} = \underbrace{\frac{R_1(n)}{n^\delta}}_{\to_{n\to\infty} c} + \sum_{2 \le i \le s} \underbrace{\frac{R_i(n)}{n^\delta} \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_1}\right)^n}_{\to_{n\to\infty} 0}$$

Spezialfall

- $Q(X) = 1 - q_1 X - \cdots - q_d X^d$ mit $q_1, \ldots, q_{d-1} \geq 0,\ q_d > 0$
- Es gibt genau ein $\xi \in \mathbb{R}_+$ mit $Q(\xi) = 0$
- Mit $\gamma_1 = \xi^{-1}$ gilt

$$Q(X) = (1 - \gamma_1 \cdot X) \cdot \prod_{2 \leq i \leq s} (1 - \gamma_i \cdot X)^{d_i}$$

  und γ_1 ist dominierend: $|\gamma_i| < \gamma_1$ $(2 \leq i \leq s)$
- Für eine C-rekursive Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ mit erzeugender Funktion $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = P(z)/Q(z)$ gilt also:

$$a_n \sim c \cdot \gamma_1^n = c \cdot \xi^{-n}$$

- Komplexitätsabschätzung für einen k-SAT-Algorithmus (MONIEN-SPECKENMEYER)
  - $t_k(n)$: obere Schranke für Anzahl der Knoten im Rekursionsbaum für k-SAT-Algorithmus für Formeln mit n Variablen (siehe Einleitung zur Vorlesung)
  - Rekursion
$$t_k(n) = t_k(n-1) + t_k(n-2) + \cdots + t_k(n-k) \quad (n \geq k)$$
  - Rekursionspolynom
$$Q_k(X) = 1 - X - X^2 - \cdots - X^k = (1 - \alpha_k X) \cdot \widetilde{Q}_k(X)$$
wobei $\alpha_k > 0$ mit $Q_k(\alpha_k^{-1}) = 0$ (dominierend)
  - asymptotisches Verhalten
$$t_k(n) \sim \alpha_k^n$$

Analyse von divide-and-conquer Rekursionen

- Ausgangspunkt (vgl. SCHÖNING, *Algorithmik*, Kap. 1.9)

$$T(N) = \sum_{i=1}^{d} q_i \cdot T(N/\beta^i) + \Theta(N^k \cdot \log_\beta^\delta N)$$

mit $q_1, q_2, \ldots, q_d \geq 0, q_d > 0$ und $k, \delta, \beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$.

- Betrachte Rekursion entlang Potenzen von β, d.h. $N = \beta^n$ und $T(N) = t_n$:

$$t_n = \sum_{i=1}^{d} q_i \cdot t_{n-i} + \Theta((\beta^k)^n \cdot n^\delta)$$

- Betrachte dies als eine forcierte lineare Rekursion!

$$t_{n+d} = \sum_{i=1}^{d} q_i \cdot t_{n+d-i} + c \cdot ((\beta^k)^n \cdot n^\delta)$$

- Die forcierende Folge ("overhead") ist C-rekursiv:

$$\sum_{n\geq 0}(\beta^k)^n n^\delta z^n = \frac{R(z)}{(1-\beta^k\cdot z)^{\delta+1}}$$

- Damit gilt

$$\sum_{n\geq 0} t_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} + z^d \cdot \frac{R(z)}{(1-\beta^k\cdot z)^{\delta+1}\cdot Q(z)}$$

- Für $Q(X) = 1 - q_1X - \cdots - q_dX^d$ sei $\xi > 0$ mit $Q(\xi) = 0$.
  $\gamma = \xi^{-1}$ ist dominierend!
- Es kommt nun auf das Verhältnis von γ und β^k an!

- γ dominiert: $\gamma > \beta^k \Leftrightarrow Q(\beta^{-k}) < 0$

$$\sum_{n\geq 0} t_n z^n = \frac{c}{(1-\gamma\cdot z)} + \frac{S(z)}{(1-\beta^k\cdot z)^{\delta+1}\cdot \widetilde{Q}(z)}$$

wobei $\widetilde{Q}(X) = Q(X)/(1-\gamma\cdot z)$ und $\deg S < d+\delta$, also

$$t_n \in \Theta(\gamma^n),\ \text{d.h. } T(N) \in \Theta(N^{\log_\beta \gamma})$$

- β^k dominiert: $\gamma < \beta^k \Leftrightarrow Q(\beta^{-k}) > 0$

$$\sum_{n\geq 0} t_n z^n = \frac{U(z)}{(1-\beta^k \cdot z)^{\delta+1}} + \frac{V(z)}{Q(z)}$$

wobei $\deg U \leq \delta$, also

$$t_n \in \Theta(n^\delta \cdot (\beta^k)^n) \text{ d.h. } T(N) \in \Theta(N^k \cdot \log_\beta^\delta N)$$

falls $\deg U = \delta$.

- $\beta^k = \gamma$ dominiert: $\gamma = \beta^k \Leftrightarrow Q(\beta^{-k}) = 0$

$$\sum_{n \geq 0} t_n z^n = \frac{K(z)}{(1 - \beta^k \cdot z)^{\delta+2}} + \frac{L(z)}{\widetilde{Q}(z)}$$

wobei $\deg K \leq \delta + 1$, also

$$t_n \in \Theta(n^{\delta+1} \cdot (\beta^k)^n) \text{ d.h. } T(N) \in \Theta(N^k \cdot \log_\beta^{\delta+1} N)$$

falls $\deg R = \delta + 1$.

Zusammenfassung:
für die Lösung einer divide-and-conquer Rekursion

$$T(N) = \sum_{i=1}^{d} q_i \cdot T(N/\beta^i) + \Theta(N^k \cdot \log_\beta^\delta N)$$

mit $q_1, \ldots, q_{d-1} \geq 0$, $q_d > 0$ und $\beta > 1$ gilt:

- $Q(\beta^{-k}) < 0 \Rightarrow T(N) \in \Theta(N^{\log_\beta \gamma})$
- $Q(\beta^{-k}) > 0 \Rightarrow T(N) \in \Theta(N^k \log_\beta^\delta N)$
- $Q(\beta^{-k}) = 0 \Rightarrow T(N) \in \Theta(N^k \cdot \log_\beta^{\delta+1} N)$

Dabei ist

- $Q(X) = 1 - q_1 X - q_2 X^2 - \cdots q_d X^d$
- $\gamma^{-1} \in \mathbb{R}_+$: positive reelle Nullstelle von $Q(X)$ (eindeutig!)