3 C-rekursive Folgen – Theorie

Lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten, kurz C-Rekursionen, sind die einfachsten, aber zugleich auch wichtigsten Rekursionsbeziehungen überhaupt:

- *einfach*, weil sich diese Thema mit Mitteln der Linearen Algebra, also Vektorraum, Basis, lineare Transformation, Eigenwerte usw., komplett beherrscht lässt. Damit sind sie ein hervorragendes Beispiel für die allgemeine Regel:

  > "Wann immer Du ein Problem modellieren willst/musst mit dem Ziel *quantitativer* Aussagen, versuche es zuerst mit den Mitteln der Linearen Algebra."

  Lineare Gleichungssysteme Lösen ist eine der elementarsten Techniken, und für alles, was damit zusammenhängt, stehen riesige Arsenale mächtiger Methoden bereit.

  Dies praktizieren viele Bereiche der exakten Wissenschaften mit durchschlagendem Erfolg. Um nur einige zu nennen: Physik, Nachrichtentechnik, Systemtheorie, Optimierung, stochastische Prozesse, ...

- *wichtig*, weil solche Rekursionen in verschiedensten Zusammenhängen auftreten: das reicht in der Informatik von der Behandlung von Komplexitätsproblemen für Algorithmen und Formale Sprachen bis hin zur Generierung von Pseudo-Zufallsfolgen. Es ist wichtig, dass man weiss, was zu tun ist, wenn man einer Situation begegnet, in der das relevant ist.

Die folgenden beiden Kapitel sollen die gemeinsamen Mechanismen erläutern, die hierbei am Werk sind.

3.1 Zwei Beispiele zur Motivation

3.1.1 Die Fibonacci-Rekursion

Die klassischste aller Rekursionen ist die der Fibonacci-Zahlen F_n

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

mit der Folge der ersten Werte

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Wegen ihrer engen Verbindung zu Themen wie "goldener Schnitt" und "euklidischer Algorithmus" und "Kettenbruckentwicklungen" und "orthogonale Polynome" ist dies sicher die meiststudierte rekursive Zahlenfolge in der Geschichte der Mathematik (mit Auswirkungen in Kunst, Biologie u.v.a.m). Ihr erstes Auftreten in dem epochalen Buch LIBER ABACI[1] des LEONARDO VON PISA alias FILIUS BONACCI um 1200 manifestiert sich als älteste überlieferte Erwähnung einer solchen rekursiven Zahlenfolge überhaupt. Für die Liebhaber dieser und ähnlicher Folgen gibt es sogar eine eigene Zeitschrift, das FIBONACCI QUARTERLY und spezielle Tagungen zu diesem Thema.

Als *Goldenen Schnitt* bezeichnet man das Verhältnis zweier Strecken der Länge a und b, wenn – es sei $a > b$ angenommen, das Verhältnis der Summe $a + b$ zur grödssen Strecke a das gleiche ist wie das der längeren Strecke a zur kürzeren Strecke b, also

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Gleichwertig dazu ist, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$X^2 = X + 1$$

ist. Die beiden Lösungen sind

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots, \qquad \widehat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180339887\ldots$$

und die Lösung ϕ ist der Goldene Schnitt. Man findet leicht durch Induktion heraus, dass zwischen den Fibonacci-Zahlen F_n und dem Goldenen Schnitt ϕ folgender Zusammenhang besteht

$$F_n = \frac{\phi^n - \widehat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

wegen $|\phi| > 1$ und $|\widehat{\phi}| < 1$ zeigt dies, dass die Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ *exponentiell schnell wächst*, eben wie ϕ^n.

Einen anderen interessanten Zusammenhang erkennt man, wenn man die sukzessiven Quotienten F_{n+1}/F_n betrachtet und der Grösse nach anordnet:

$$\frac{1}{1} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \cdots < \frac{34}{21} < \frac{13}{8} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

[1]Dieses Buch ist wegen der Zahlenfolge ganz interessant, aber die wahre Bedeutung geht sehr viel weiter: es ist eines der ersten und vielleicht das wichtigste Zeugnis für das Aufkommen der indisch-arabischen Mathematik in Europa um 1200, mit dezimalem Zahlensystem und Null und bis heute praktizierten Rechenverfahren – den "Algorithmen", genannt nach AL KHWARIZM, einem Mathematiker an der *Schule der Weisheit* in Bagdad um das Jahr 800. Die Tatsache, dass auch das Wort *Algebra*, aus dem Titel eines Buches von AL KHWARIZM entnommen, auf diesem Weg zu uns gekommen ist, spricht für die epochale Bedeutung dieses Vorgangs.

Diese Verhältnisse ergeben sich aus der Formel

$$F_{n+1}\,F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

die man ebenfalls leicht per Induktion beweisen kann. Sie zeigt letzlich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

gilt, wobei der Grenzwert von rechts und links "eingeschachtelt" wird.

3.1.2 Das Frisbee-Problem

Das Frisbee-Problem lässt sich als ein Transitionssystem modellieren, bei dem es drei Zusände gibt, die besagen, welches zu einem gegebenen Zeitpunkt der (kürzeste von zwei Möglichkeiten) Abstand der beiden Frisbee-Scheiben in einem Graphen von 5 Knoten auf einem Kreis ist. Also

"1" : die Scheiben haben Abstand 1 (= Startzustand)
"2" : die Scheiben haben Abstand 2
"3" : die Scheiben haben Abstand 0 (= Endzustand)

Zählt man die Anzahl $a_{i,j}$ der Möglichkeiten, von einem Zustand "i" in einen Zustand j zu gelangen, so ergibt das in Matrixdarstellung

$$A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wenn man wissen will, wie viele Möglichkeiten es gibt, in n Spielzügen von einem Zustand "i" in einen Zustand j zu gelangen, so findet man diese Information in der n-ten Potenz der Matrix A, also

$$A^n = \left[a_{i,j}^{(n)}\right].$$

Beispielsweise ist

$$A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 35 & 20 & 6 \\ 20 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 125 & 75 & 26 \\ 75 & 50 & 23 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 278125 & 171875 & 65626 \\ 171875 & 106250 & 40623 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = \begin{bmatrix} 106894531250 & 66064453125 & 25234375001 \\ 66064453125 & 40830078125 & 15595703123 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Insbesondere interessieren diese Anzahlen für den Ausgangspunkt "i"="1". Das ist jeweils die erste Zeile der Matrix A^n. Ordnet man für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ diese Zahlen spaltenweise an, so erhält man das Schema

$$\boldsymbol{h} = \left[h_i^{(n)}\right]_{1\le i\le 3, n\ge 0} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 35 & 125 & 450 & 1625 & 5875 & 21250 & \ldots \\ & 1 & 5 & 20 & 75 & 275 & 1000 & 3625 & 13125 & \ldots \\ & & 1 & 6 & 26 & 101 & 376 & 1376 & 5001 & \ldots \end{bmatrix}$$

Das erhält man auch durch Ausfüllen des Trellis-Diagramms, siehe Abbildung 1. Das ist nichts anderes als ein Schema zur iterativen Berechnung von

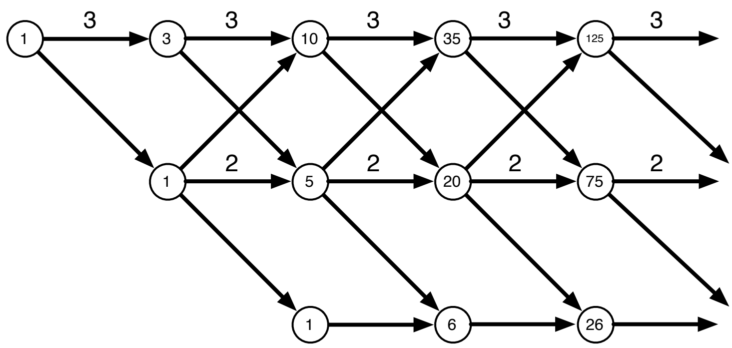

Abbildung 1: Trellis-Diagramm für das Frisbee-Spiel

$$\boldsymbol{h} = \left[h_i^{(n)}\right]_{1\le i\le 3, n\ge 0} = \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot A^n\right)^{\mathtt{t}} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Von Interesse ist nun die Frage, wie sich die beiden Folgen

$$\boldsymbol{h}_1 = \left(h_1^{(n)}\right)_{n\ge 0} = [1, 3, 10, 35, 125, 450, 1525, \ldots]$$
$$\boldsymbol{h}_2 = \left(h_2^{(n)}\right)_{n\ge 0} = [0, 1, 5, 20, 75, 275, 1000 \ldots]$$

für $n \to \infty$ verhalten.

Auf experimenteller Ebene kann man feststellen, dass die (ersten paar Werte der) beiden Folgen derselben Rekursion genügen:

$$h_i^{(n)} = 5 \cdot h_i^{(n-1)} - 5 \cdot h_i^{(n-2)} \qquad (i = 1, 2, n \geq 2)$$

und sich durch die Startwerte unterscheiden:

$$h_1^{(0)} = 1, h_1^{(1)} = 3, \qquad h_2^{(0)} = 0, h_2^{(1)} = 1.$$

Die dritte Folge

$$\boldsymbol{h}_3 = \left(h_3^{(n)}\right)_{n \geq 0} = [0, 0, 1, 6, 26, 101, 376, 1376, \ldots]$$

genügt einer etwas anderen ("inhomogenen") Rekursion

$$h_3^{(n)} = 5 \cdot h_i^{(n-1)} - 5 \cdot h_i^{(n-2)} + 1 \qquad (n \geq 2)$$

mit den Startwerten

$$h_3^{(0)} = 1, h_3^{(1)} = 0.$$

Das liegt an der Sonderrolle als Zustand, von dem aus man nicht zu den anderen zurückkommen kann. Man kann auch eine "homogene" Rekursion für die Folge $\boldsymbol{h}_3$ finden:

$$h_3^{(n)} = 6 \cdot h_i^{(n-1)} - 10 \cdot h_i^{(n-2)} + 5 \cdot h_i^{(n-3)} \qquad (n \geq 3)$$

mit den Startwerten

$$h_3^{(0)} = 1, h_3^{(1)} = 0, h_3^{(2)} = 0.$$

Wie kommt es zu diesen Rekursionen? Als Hinweis: man sollte sich das *charakteristische Polynom* der Matrix A anschauen:

$$\chi_A(z) = \det(z \cdot \mathbb{I}_3 - A) = z^3 - 6\,z^2 + 10\,z - 5 = (z-1) \cdot (z^2 - 5\,z + 5)$$

Diese Polynome haben genau die Koeffizienten, wie sie in der Rekursionen auftreten. Dabei wir das Geschehen auf den beiden Zuständen "1" und "2" durch das Polynom $z^2 - 5\,z + 5$ "beschrieben". Der "Sonderstatus" des Zustandes "3" macht sich durch den zusätzlichen Faktor $z - 1$ bemerkbar.

3.2 Zwei Vorbemerkungen

3.2.1 Lineare Rekursionen 1. Ordnung

Ist eine Folge $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geq 0}$ von komplexen Zahlen gegeben durch die lineare Rekursion 1. Ordnung

$$x_{n+1} = a \cdot x_n \quad (n \geq 0) \quad \text{mit Anfangswert } x_0,$$

mit einer komplexen Konstanten a, so gilt offensichtlich

$$x_n = a^n \cdot x_0 \quad (n \geq 0).$$

Insbesondere gilt dann auch

$$|x_n| = |a|^n \cdot |x_0| \quad (n \geq 0).$$

Über das asymptotische Verhalten von $\boldsymbol{x}$ hat man daher einen einfachen Überblick

- Falls $x_0 = 0$ ist, ist auch $x_n = 0$ für alle $n \geq 0$.
- Falls $x_0 \neq 0$ ist:
  - Falls $|a| > 1$ ist , gilt $|x_n| \uparrow\infty$; die Folge wächst exponentiell schnell.
  - Falls $|a| = 1$ ist , gilt $|x_n| = |x_0|$ für alle $n \geq 0$; die Folge bleibt beschränkt.
  - Falls $|a| < 1$ ist , gilt $|x_n| \downarrow 0$; die Folge schrumpft exponentiell schnell gegen 0.

Dieses typische Verhalten wird sich auch in der allgemeinen Situation wiederfinden. Lösungen setzen sich aus diesen drei Lösungstypen additiv zusammen.

Man kann noch bemerken, dass hier a Nullstelle der "charakteristischen Gleichung" $z - a = 0$ ist.

3.2.2 Potenzen von Matrizen

Hat man eine $(k \times k)$-Matrix A und steht vor der Aufgabe, die Potenz A^n für ein grosses n zu berechnen, so kann man - statt dies auf dem üblichen Weg (vgl. späteren Abschnitt) auszurechnen, auf folgendermassen vorgehen:

(1) Diagonalisiere A, d.h. finde (falls das möglich ist) eine nichtsinguläre Transformation T mit

$$T \cdot A \cdot T^{-1} = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

wobei die $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A sind.

(2) Berechne

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

(3) Führe die Rücktransformation aus:

$$A^n = (T^{-1} \cdot D \cdot T)^n = T^{-1} \cdot D^n \cdot T$$

Der entscheidende Vorteil liegt in dem Schritt (2): Potenzen von Diagonalmatrizen sind offensichtlich viel "billiger" zu berechnen als Potenzen von allgemeinen Matrizen. Die Kosten für das Auffinden der Matrizen der Matrix T und die Berechnung von deren Inversen – falls die überhaupt existieren, was ja nicht garantiert ist – müsste man natürlich fairerweise mit in die Kostenkalkulation einbeziehen.

3.3 Definitionen, grundlegende Eigenschaften

Definition 1. Es bezeichne $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller unendlichen Folgen

$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n \geq 0}$$

von komplexen Zahlen, die, versehen mit der komponentenweisen Addition

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_0 + y_0, y_1 + y_1, y_2 + y_2, \dots) = (x_n + y_n)_{n \geq 0}$$

und der Skalarmultiplikation mit $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\, \boldsymbol{x} = (\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots = (\alpha x_n)_{n \geq 0}$$

ein (unendlich-dimensionaler) komplexer Vektorraum ist. Das neutrale Element ist die Nullfolge

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots) = (0)_{n \geq 0}.$$

Uns interessieren in der Folge spezielle endlich-dimensionale Teilräume von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Definition 2. Sind $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ mit $\alpha_k \neq 0$, so ist durch

$$(*_n) \qquad x_n = a_1\, x_{n-1} + a_2\, x_{n-2} + \dots + a_k\, x_{n-k}$$

eine *lineare Rekursion k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*, kurz: eine *C-Rekursion der Ordnung k* definiert.

Eine Folge $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ genügt der durch $\boldsymbol{a}$ definierten Rekursion, wenn $(*_n)$ für alle $n \geq k$ gilt.
DIe Menge aller bezüglich $\boldsymbol{a}$ rekursiven Folgen wird mit

$$\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\, ; \, \boldsymbol{x} \text{ erfüllt } (*_n) \text{ für alle } n \geq k\right\}$$

bezeichnet.

Das Polynom vom Grad k

$$a(z) = 1 - a_1\, z - a_2\, z^2 - \ldots - a_k\, z^k$$

wird als *Rekursionspolynom* (der durch $\boldsymbol{a}$ gegebenen Rekursion) bezeichnet, das Polynom (ebenfalls vom Grad k)

$$\chi_{\boldsymbol{a}}(z) = z^k - a_1\, z^{k-1} - a_2\, z^{k-2} - \cdots - a_k$$

als das *charakteristische Polynom* dieser Rekursion.

Beispiel 1. Die Fibonacci-Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ hat das Rekursionspolynom $1 - z - z^2$ und das charakteristische Polynom $z^2 - z - 1$.

Die Frisbee-Rekursion $G_n = 5\, G_{n-1} - 5\, G_{n-2}$ hat das Rekursionspolynom $1 - 5z + 5z^2$ und das charakteristische Polynom $z^2 - 5z + 5$.

Bemerkung 1.

1. Ist $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0}$ eine C-rekursive Folge mit einer durch $\boldsymbol{a}$ gegebenen Rekursion der Ordnung k, so ist $\boldsymbol{x}$ durch die Angabe der k “Startwerte” $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ eindeutig bestimmt.

2. Offensichtlich kann $\xi = 0$ weder eine Nullstelle des Rekursionspolynoms $a(z)$, noch eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_{\boldsymbol{a}}(z)$ sein, da der jeweilige konstante Term $\neq 0$ ist. Ansonsten gilt für $\xi \in \mathbb{C}$:

$$a(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_{\boldsymbol{a}}(\xi^{-1}) = 0,$$

d.h. die Nullstellen von $\chi_{\boldsymbol{a}}(z)$ sind genau die Reziproken der Nullstellen der Nullstellen von $a(z)$.

Das überträgt sich auch auf mehrfache Nullstellen: $a(z)$ hat genau dann $\xi \in \mathbb{C}$ als t-fache Nullstelle, wenn ξ^{-1} eine t-fache Nullstelle von $\chi_{\boldsymbol{a}}(z)$ ist.

Satz 1. *Für $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ mit $\alpha_k \neq 0$ ist $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ ein Untervektorraum der Dimension k von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Zum Beweis: Die Rekursionsbedingungen $(*_n)$ sind *lineare* Bedingungen, deshalb ist $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ gegenüber Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen. Ein Element $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0}$ ist durch seine k Startwerte $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ eindeutig festgelegt, deshalb ist $\dim \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}} = k$.

Eine Basis von $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ bilden beispielsweise die k Folgen $\boldsymbol{e}^{(j)} = \left(e_n^{(j)}\right)_{n\geq 0}$, $(0 \leq j < k)$, die durch die Werte

$$e_n^{(j)} = \delta_{j,n}$$

gegeben sind (Standardbasis). □

Satz 2. *Für $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ mit $\alpha_k \neq 0$ habe das charakteristische Polynom $\chi_{\boldsymbol{a}}(z)$ k verschiedene komplexe Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dann bilden die k Folgen*

$$\boldsymbol{\lambda}_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2, \lambda_j^3, \ldots) = \left(\lambda_j^n\right)_{n\geq 0} \qquad (1 \leq j \leq k)$$

eine Basis von $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$.

Zum Beweis: Die Aussage $\chi_{\boldsymbol{a}}(\xi) = 0$ schreibt sich

$$\xi^k - a_1\,\xi^{k-1} - a_2\,\xi^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$

und das ist (wegen $\xi \neq 0$) äquivalent zu

$$\xi^n = a_1\,\xi^{n-1} + a_2\,\xi^{n-2} + \cdots + a_k\,\xi^{n-k}$$

für alle $n \geq k$. Somit sind alle angegebenen Folgen $\boldsymbol{\lambda}_j$ Elemente von $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$.

Dass diese k Folgen linear-unabhängig sind, folgt daraus, dass die $(k \times k)$-Matrix der Startwerte

$$\left[\lambda_j^{i-1}\right]_{1\leq i,j\leq k} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

ein Vandermonde-Matrix ist, dass also

$$\det \left[\lambda_j^{i-1}\right]_{1\leq i,j\leq k} = \prod_{1\leq i<j\leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

gilt. □

Bemerkung 2. Der Beweis macht entscheidenden Gebrauch von der Voraussetzung, dass die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschieden sind! Eine allgemeinere Formulierung, die auch den Fall mehrfacher Nullstellen einschliesst, wird weiter unten gegeben.

Für den Rest dieses Abschnitts wird angenommen, dass k paarweise verschiedene Nullstellen vorliegen.

Folgerung 3. *Zu jeder Folge $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ gibt es eindeutig bestimmte Konstante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{C}$ mit*

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{\lambda}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\lambda_2} + + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{\lambda}_1$$

also explizit ausgeschrieben

$$\boxed{x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n \quad (n \geq 0).}$$

Diese Koeffizienten ergeben sich als die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{k-1} \end{bmatrix}$$

Kommentar 3. Diese Darstellung zeigt explizit, wie das Verhalten der Folgenkoeffizienten x_n für wachsendes n von den Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ bestimmt wird:

$$x_n = \sum_{|\lambda_i|>1} \alpha_i \lambda_i^n + \sum_{|\lambda_j|=1} \alpha_j \lambda_j^n + \sum_{|\lambda_\ell|<1} \alpha_\ell \lambda_\ell^n$$

Die erste Summe enthält *exponentiell wachsende* Summanden, die zweite Summe ist *beschränkt*, die dritte Summe *schrumpft exponentiell schnell* gegen 0.

Es ist üblich, die Nullstellen so zu nummerieren, dass

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$$

gilt. Das wird auch hier so gehandhabt.

Beispiel 2. Die Situation $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ $(2 \le j \le k)$ ist besonders interessant und in Anwendungen häufig anzutreffen: man sagt dann, dass λ_1 eine *dominierende* Nullstelle sei.

In diesem Fall kann man, falls $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\ge 0} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ mit $\alpha_1 \ne 0$ ist, x_n so darstellen:

$$x_n = \lambda_1^n \Big(\alpha_1 + \underbrace{\alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n + \cdots + \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n}_{(\dagger)}\Big)$$

wobei der Ausdruck $(\dagger)$ wegen $|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}| < 1$ für $2 \le j \le k$ exponentiell schnell gegen 0 konvergiert. Daher gilt in dieser Situation die asymptotische Aussage

$$\boxed{x_n \sim \alpha_1\, \lambda_1^n}$$

3.4 Die beiden Probleme (revisited)

3.4.1 Die Fibonacci-Rekursion

Die FIBONACCI-Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ hat das Rekursionspolynom $F(z) = 1 - z - z^2$ und das charakteristische Polynom $\chi_F(z) = z^2 - z - 1$, das schon im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt aufgetreten ist. $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ und $\widehat{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$ sind die beiden Nullstellen:

$$\chi_F(z) = z^2 - z - 1 = (z-\phi)(z-\widehat{\phi})$$

Es gilt also $\phi - \widehat{\phi} = 1$ und $\phi \cdot \widehat{\phi} = -1$. Die Glieder der FIBONACCI-Folge $(F_n)_{n\ge 0}$ müssen sich in der Form

$$F_n = \alpha_1\, \phi^n + \alpha_2\, \widehat{\phi}^n$$

darstellen lassen. Für $n = 0, 1$ erhält man die Bedingungen

$$0 = F_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad 1 = F_1 = \alpha_1\, \phi + \alpha_2\, \widehat{\phi},$$

die sich ohne weiteres lösen lassen zu

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Damit hat man die eingangs erwähnte Darstellung

$$F_n = \frac{\phi^n - \widehat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

aus den "allgemeinen Prinzipien" hergeleitet.

3.4.2 Das Frisbee-Problem

Das geschehen wird durch die Eigenwerte der Frisbee-Matrix

$$A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bestimmt. Es sind dies

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{5+\sqrt{5}}{2} = 3.618033988\ldots, \\ \lambda_2 &= \frac{5-\sqrt{5}}{2} = 1.381966012\ldots, \\ \lambda_3 &= 1. \end{aligned}$$

Für das praktische Rechen mit diesen Eigenwerten ist es nützlich, die folgenden Beziehungen zu beachten:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 5, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5.$$

Für das Geschehen auf den Zuständen “1” und “2” ist nur die Teilmatrix

$$A' = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 zuständig. Die zugehörigen Folgen $\boldsymbol{\lambda}_1 = \left(\lambda_1^{(n)}\right)_{n \ge 0}$ und $\boldsymbol{\lambda}_2 = \left(\lambda_2^{(n)}\right)_{n \ge 0}$ genügen offensichtlich der Rekursion

$$\lambda_i^{(n)} = 5 \cdot \lambda_i^{(n-1)} - 5 \cdot \lambda_i^{(n-2)} \quad (i = 1, 2, n \ge 2).$$

Die beiden Folgen $\boldsymbol{h}_1 = \left(h_1^{(n)}\right)_{n \ge 0}$ und $\boldsymbol{h}_2 = \left(h_2^{(n)}\right)_{n \ge 0}$ müssen der gleichen Rekursion genügen, haben aber andere Startwerte. Es muss also Konstante $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ geben mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}_1 &= \alpha \cdot \boldsymbol{\lambda}_1 + \beta \cdot \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \boldsymbol{h}_2 &= \delta \cdot \boldsymbol{\lambda}_1 + \epsilon \cdot \boldsymbol{\lambda}_2 \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Anfangswerte ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{(0)} & h_1^{(1)} \\ h_2^{(0)} & h_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und somit
$$\alpha = \frac{\lambda_1}{5}, \quad \beta = \frac{\lambda_2}{5}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$
Es gilt also
$$h_1^{(n)} = \frac{1}{5}\left(\lambda_1^{n-+1} + \lambda_2^{n+1}\right), \quad h_2^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right).$$
Mit diesen Informationen lässt sich nun die Frage nach der mittleren Spieldauer beantworten. Dafür betrachetet man einen Zufallsvariable X, bei das Ereignis "$X = k$" bedeutet: "das Spiel ist nach genau k Würfen beendet". Für den Erwartungswert von X erhält man dann:

$$\begin{aligned}
\mathtt{E}[X] &= \sum_{k\geq 0} k \cdot \mathtt{P}[X = k] \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{n<k} \mathtt{P}[X = k] \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k>n} \mathtt{P}[X = k] \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathtt{P}[\text{Spiel benötigt} > n \text{ Würfe}]
\end{aligned}$$

Nun ist $\mathtt{P}[\text{Spiel benötigt} > n \text{ Würfe}]$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Spiel nach n Würfen im Zustand "1" oder im Zustand "2" befindet – und diese Wahrscheinlichkeit ist nichts anderes als
$$\frac{1}{4^n}\left(h_1^{(n)} + h_2^{(n)}\right).$$
Damit gilt also
$$\begin{aligned}
\mathtt{E}[X] &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\left(h_1^{(n)} + h_2^{(n)}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\left[\frac{1}{5}\left(\lambda_1^{n-+1} + \lambda_2^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right)\right].
\end{aligned}$$
Der Rest ist Routine: man summiert die geometrischen Reihen oder zieht ein Computeralgebra-System wie `Maple` oder `Mathematica` zu Rate. In jedem Fall ergibt sich
$$\mathtt{E}[X] = 12.$$

3.5 Schieberegisterfolgen

In der digitalen Schaltungstechnik und Codierungstheorie spielen (vorwiegend binäre, aber das ist hier nicht der wesentliche Aspekt) C-rekursive Folgen eine wichtige Rolle, weil sie sehr einfach generiert werden können und viele nützliche Verwendungen haben. Die folgende Skizze soll illustrieren, wie sich eine C-Rekursion mit Hilfe eines “rückgekoppelten Schiegeregisters” (LFSR=*linear feedback shift register*) darstellen bzw. implementieren lässt:

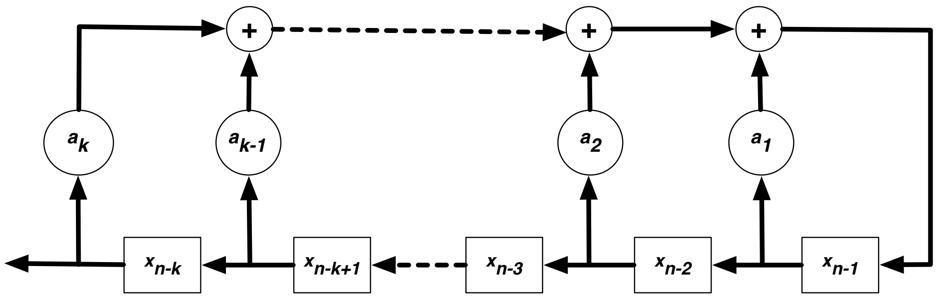

Abbildung 2: C-Rekursion und Schieberegister

Hierbei symbolisieren die Quadrate Speicherzelle, die jeweils eine Zahl aufnehmen können. Die mit $a_1, \ldots, a_k$ beschriebenen Kreise stellen Multiplikatoren dar, die übrigen, mit “+” markierten Kreise sind Addierer. Die Funktionsweise ist suggestiv:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ enthalten die Speicherzellen (von links nach rechts gelesen) die Startwerte $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0$.
- Haben die Speicherzellen zu einem Zeitpunkt $t = n - 1$ die Inhalte (von links nach rechts gelesen) $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}$, so werden diese in einem Takt in die jeweils linke benachbarte Zelle verschoben. Ausserdem wird der ursprüngliche Wert x_{n-k} der linkeste Zelle ausgelesen und die rechteste Zelle neu geladen mit dem Wert

  $$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}.$$

  Zum Zeitpunkt $t = n$ sind die Zelleninhalte also $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_n$.

Arbeitet man über einem binären Alphabet, also dem zweielementigen Körper $\mathbb{F}_2 = (\mathbb{B}; \oplus, \otimes)$, wobei $\oplus$ bzw. $\otimes$ die Addition modulo 2 bedeuten, so ist eine derart generierte Folge notwendigerweise *periodisch*. Mit Schieberegistern aus k

Speicherzellen, kann man binäre Folgen generieren, die Periodenlänge $2^n - 1$ habe. Folgen dieser Art wurden und werden als Pseudozufallsfolgen verwendet.

Betrachtet man beispielsweise das Schieberegister

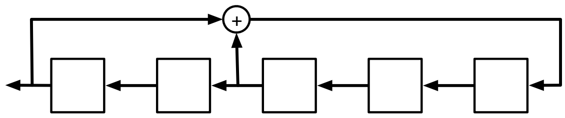

Abbildung 3: Schiebegister zur Rekursion $x_n = x_{n-3} + x_{n-5}$

so wird folgende Zustandsfolge durchlaufen (spaltenweise zu lesen):

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Hier eine Kostprobe: eine Pseudo-Zufallsfolge über $\mathbb{F}_2$, die von der Rekursion $x_n = x_{n-7} + x_{n-10}$ erzeigt wurde:

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1\\
1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0\\
1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\
1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&1\\
1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1\\
1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1\\
1&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1\\
1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\
1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0\\
1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0\\
1&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1\\
1&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1\\
1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

3.6 Matrizen, Theorem von Cayley-Hamilton

Lineare C-Rekursionen werden durch lineare Transformationen beschrieben. Das Konzept der *Begleitmatrix* macht das. Das ist aber nur eine Umformulierung bekannter Begriffe.

Definition 3. Ist durch $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ mit $\alpha_k \neq 0$, eine C-Rekursion gegeben, so bezeichnet

$$C_{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_k \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

die *Begleitmatrix* (*companion matrix*) dieser Rekursion.

Satz 4. *1. Ist $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ und bezeichnet für $n \geq 0$*

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x_n & x_{n+1} & \ldots & x_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

den k-Vektor aufeinanderfolgender Folgenelemente, so gilt

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} \cdot C_{\boldsymbol{a}}$$

und daher auch

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(0)} \cdot C_{\boldsymbol{a}}^n$$

2. Für das charakteristische Polynom $\chi_{\boldsymbol{a}}(z)$ gilt

$$\chi_{C_{\boldsymbol{a}}}(z) = \chi_a(z) = \det\left(z \cdot \mathbb{I}_k - C_{\boldsymbol{a}}\right) = \prod_\lambda (z - \lambda).$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{I}_k$ die $(k \times k)$-Einheitsmatrix und das Produkt läuft über alle Eigenwerte λ von $C_{\boldsymbol{a}}$, also die Nullstellen von $\chi_{C_{\boldsymbol{a}}}(z) = \chi_a(z)$ entsprechend ihrer Vielfachheit.

3. Für das Rekursionspolynom $a(z)$ gilt

$$a(z) = \det\left(\mathbb{I}_k - z \cdot C_{\boldsymbol{a}}\right) = \prod_\lambda (1 - \lambda\, z).$$

Interessanter ist die Tatsache, dass und auf welchem Wege Potenzen beliebiger quadratischer Matrizen auf C-Rekursionen führen. Das ist i.w. der Inhalt eines der wichtigsten (und schönsten!) Resultate der linearen Algebra:

Theorem 5 (Cayley-Hamilton).
Jede $(k \times k)$-Matrix A erfüllt ihr charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(A) = \mathbb{O}_k,$$

wobei $\mathbb{O}_k$ die $(k \times k)$-Nullmatrix ist.

Explizit gemacht:

$$A^k = a_1\, A^{k-1} + a_2\, A^{k-2} + \cdots + a_k\, A^0,$$

wobei die $a_1, \ldots, a_k$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind.
Es gilt also auch – nach Multiplikation mit A^{n-k} –für jedes $n \geq k$:

$$(*_n) \quad A^n = a_1\, A^{n-1} + a_2\, A^{n-2} + \cdots + a_k\, A^{n-k}$$

Schreibt man die Matrizen als

$$A^n = \left(A_{i,j}^{(n)}\right)_{1 \leq i,j \leq k}$$

und betrachtet man in der Matrizengleichung $(*_n)$ für irgendeine Position (i, j) mit $1 \leq i, j \leq k$ die Koeffizienten in der Position (i, j), so gilt offensichtlich

$$A^n(i,j) = a_1\, A^{n-1}(i,j) + a_2\, A^{n-2}(i,j) + \cdots + a_k\, A^{n-k}(i,j) \quad (n \geq k),$$

und daher:

Folgerung 6. *Für jede $(k \times k)$-Matrix A und jedes (i, j) mit $1 \leq i, j \leq k$ ist die Folge $\left(A_{i,j}^{(n)}\right)_{n \geq 0}$ C-rekursiv mit charakterstischem Polynom $\chi_A(z)$.*

3.7 Reverse engineering

Bisher war die Folge $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ der Rekursionskoeffizienten gegeben und es wurde das Verhalten von Folgen $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geq 0}$ untersucht, die der entsprechenden Rekursion genügen.

Interessant (und praktisch relevant in der Nachrichtentechnik, Codierungstheorie und Kryptografie) ist aber auch die umgekehrte Fragestellung:

- Gegeben eine Folge $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0}$, von der man weiss, dass sie C-rekursiv ist, aber deren Rekursionskoeffizienten man nicht kennt:
  bestimme eine solche Folge $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$!

Eine solche Folge muss keineswegs $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sein, aber man kann zeigen, dass die *kürzeste* solche Folge, also mit minimalem k, eindeutig bestimmt ist. Für diese minimale Länge gibt es eine einfaches Kriterium und sobale diese minimale Länge k bekannt ist, kann man aus $2k$ aufeinanderfolgenden Gliedern der Folge $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0}$ auch die Koeffizienten $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ durch Lösung eines linearen Gleichungsystems berechnen.

Definition 4. Ist durch $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ mit $\alpha_k \neq 0$, eine C-Rekursion gegeben, so bezeichnet

$$H^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(n)} \\ \boldsymbol{x}^{(n+1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{(n+k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n & x_{n+1} & \ldots & x_{n+k-1} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1} & x_{n+k} & \ldots & x_{n+2k-2} \end{bmatrix}$$

die n-te *Hankelmatrix* der Folge $\boldsymbol{x}$.

Satz 7. *Damit ist*

$$H^{(n+1)}(\boldsymbol{x}) = H^{(n)}(\boldsymbol{x}) \cdot C_a = \ldots = H^{(0)}(\boldsymbol{x}) \cdot C_a^{n+1}.$$

und

$$\det H^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \det H^{(0)}(\boldsymbol{x}) \cdot a_k^n.$$

Satz 8. *Die durch $a(z)$ gegebene Rekursion für $\boldsymbol{x}$ hat* minimale Länge *genau dann, wenn je k aufeinanderfolgende Vektoren $\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{x}^{(n+1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n+k-1)}$ linear-unabhängig sind, d.h. wenn*

$$\det H^{(n)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$$

für ein n und damit für alle $n \geq 0$.

Folgerung 9. *Beachte, dass*

$$\begin{bmatrix} a_k & a_{k-1} & \ldots & a_1 \end{bmatrix} \cdot H^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{(n+k)}$$

ist, ausgeschrieben (da $H^{(n)}(\boldsymbol{x})$ symmetrisch ist):

$$\begin{bmatrix} x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+k-1} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1} & x_{n+k} & \cdots & x_{n+2k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \cdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+k} \\ x_{n+k+1} \\ \cdots \\ x_{n+2k-1} \end{bmatrix}$$

Sind die $2k$ aufeinanderfolgenden Werte $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+2k-1}$ bekannt und ist weiss man, dass $\boldsymbol{x}$ C-rekursiv mit der minimalen Ordnung k ist, also $\det H^{(n)} \neq 0$*, so kann man daraus die $a_1, a_2, \ldots, a_k$ berechnen.*

3.8 Mehrfache Nullstellen

Ist

$$a(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_k z^k,$$

ein Rekursionspolynom mit <u>mehrfachen</u> Nullstellen, dann hat auch das charakteristische Polynom

$$\chi_a(z) = z^k - a_1 z^{k-1} - \cdots - a_k$$

mehrfache Nullstellen. Sind $\lambda_1 \ldots \lambda_\ell$ die <u>verschiedenen</u> Nullstellen von $\chi_a(z)$ und t_j die Vielfachheit der Nullstelle λ_j, so ist

$$\chi_a(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z - \lambda_j)^{t_j}$$

die Faktorisierung von $\chi_a(z)$ in Linearfaktoren. In diesem Fall gilt:

Satz 10. *1. Der Vektorraum $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ hat als Basis die k Folgen*

$$\boldsymbol{\lambda}_j^{(s)} = \left(n^s \cdot \lambda_j^n\right)_{n \geq 0} \qquad (1 \leq j \leq \ell, 0 \leq s < t_j)$$

2. Jede Folge $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$x_n = \sum_{j=1}^{\ell} p_j(n) \cdot \lambda_j^n \qquad (n \geq 0)$$

wobei p_j ein Polynom vom Grad $< t_j$ ist $(1 \leq j \leq \ell)$.

3.9 Rationale Funktionen

Es sei zunächst einmal, wie bisher,

$$a(z) = 1 - a_1\, z - a_2\, z^2 - \cdots - a_k\, z^k \quad \text{mit}\, a_k \neq 0$$

ein Rekursionspolynom vom Grad k, gegeben durch die Koeffizientenfolge $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, das eine C-Rekursion

$$f_n = a_1\, f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_k\, f_{n-k} \quad (n \geq k)$$

der Ordnung k definiert. Jede Folge $\boldsymbol{f} = (f_n)_{n \geq 0}$, die dieser Rekursion genügt, also Element von $\mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$ ist, ist durch die k Anfangswerte $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ eindeutig bestimmt.

Ist nun $b(z) = b_0 + b_1\, z + b_2\, z^2 + \cdots + b_{k-1}\, z^{k-1}$ ein Polynom höchstens vom Grad $k-1$, so kann man dessen Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ dazu benutzen, die k Anfangswerte $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ festzulegen:

$$\begin{aligned}
f_0 &= b_0 \\
f_1 &= a_1\, f_0 + b_1 \\
f_2 &= a_2\, f_1 + a_2\, f_0 + b_2 \\
&\vdots \\
f_{k-1} &= a_1\, f_{k-2} + a_2\, f_{k-3} + \cdots + a_{k-1}\, f_1 + b_{k-1}
\end{aligned}$$

Umgekehr sind natürlich auch die $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ durch die $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned}
b_0 &= f_0 \\
b_1 &= f_1 - a_1\, f_0 \\
b_2 &= f_2 - a_2\, f_1 - a_2\, f_0 \\
&\vdots \\
b_{k-1} &= f_{k-1} - a_1\, f_{k-2} - a_2\, f_{k-3} - \cdots - a_{k-1}\, f_1
\end{aligned}$$

Diese k Gleichungen kann man mit den Gleichungen

$$0 = f_n - a_1\, f_{n-1} - a_2 f_{n-2} - \cdots - a_k\, f_{n-k} \quad (n \geq k)$$

elegant zusammenfassen:

$$(*) \qquad b(z) = f(z) \cdot a(z),$$

wobei für eine Folge $\boldsymbol{f} = (f_n)_{n\geq 0}$ mit

$$f : z \mapsto f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n\, z^n.$$

eine Potenzreihe (Vgl. Abschitt 1.2.2) gemeint ist. Die Gleichung $(*)$ ist dort sinnvoll, wo diese Potenzreihe konvergiert. Der Bereich, in dem Konvergenz herrscht, ist durch den *Konvergenzradius* ρ_f gegeben (Cauchy-Hadamard-Kriterium):

$$\rho_f = \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n}.$$

Für $|z| < \rho_f$ konvergiert die Reihe, für $|z| > \rho_f$ divergiert sie. Für $|z| = \rho_f$ können beide Fälle auftreten.
Man kann zeigen, dass in dieser Situation

$$\rho_f = \min_{a(\xi)=0} |\xi|$$

gilt, und dies ist > 0, da $a(0) = 1 \neq 0$ ist.

Bemerkung 4. Man erlaubt sich, in der eben dargestellten Situation kurzerhand

$$f(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

zu schreiben und meint damit folgendes: $f(z)$ ist eine Potenzreihe, deren Koeffizienten durch die Taylorentwicklung des Quotienten $b(z)/a(z)$ um $z = 0$ gegeben sind. Diese Taylorreihe konvergiert in jedem Kreis um den Nullpunkt, der keine Nullstelle von $a(z)$ enthält.

Ein Objekt dieser Art nennt man eine *rationale Funktion.*

Nun kann man zusammenfassen:

Theorem 11.

Für eine Folge $\boldsymbol{f} = (f_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *und ein (komplexes) Polynom*

$$a(z) = 1 - a_1\, z - a_2\, z^2 - \cdots - a_k\, z^k = \prod_{1\leq \ell \leq k} (1 - \lambda_\ell\, z)$$

vom Grad k (mit einfachen Nullstellen) sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\boldsymbol{f} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{a}}$*, d.h.* $\boldsymbol{f}$ *ist eine C-rekursive Folge mit Rekursionspolynom $a(z)$, d.h.*

$$f_n = a_1\, f_{n-1} + a_2\, f_{n-2} + \cdots + a_k\, f_{n-k} \quad (n \geq k).$$

2. *Es gibt Konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ mit*

$$f_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n \quad (n \geq 0).$$

3. *Es gibt ein (komplexes) Polynom $b(z)$ vom Grad $< k$ mit*

$$f(z) = \frac{b(z)}{a(z)}.$$

Was fü r den kompletten Beweis noch fehlt, ist die Implikation von 3. zurück zu 2. Das ist aber einfach: Man macht in der Darstellung

$$f(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{\prod_{1 \leq \ell \leq k}(1 - \lambda_\ell z)}$$

eine Partialbruchzerlegung und erhält

$$f(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{\prod_{1 \leq \ell \leq k}(1 - \lambda_\ell z)} = \sum_{1 \leq \ell \leq k} \frac{\beta_\ell}{1 - \lambda_\ell z}$$

mit geeigneten Konstanten $\beta_1, \dots, \beta_k$.

Jetzt muss man nur noch die Quotienten in den Summen in geometrische Reihen entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n = \sum_{1 \leq \ell \leq k} \beta_\ell \sum_{n \geq 0} \lambda_\ell^n z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{1 \leq \ell \leq k} \beta_\ell \lambda_\ell^n \right) z^n$$

was per Koeffizientenvergleich

$$f_n = \sum_{1 \leq \ell \leq k} \beta_\ell \lambda_\ell^n$$

liefert.

Kommentar 5. Man kann dieses Theorem auch noch allgemeiner formulieren:

- Man kann die Bedingung der Einfachheit der Nullstellen voon $a(z)$ fallenlassen. Das führt zu Modifikationen, wie im vorigen Abschnitt 3.8 ausgeführt.
- Man kann die Bedingung fallenlassen, dass der Grad des Polynoms $b(z)$ kleiner sein muss als der Grad des Polynoms $a(z)$. Das führr nur zu bescheidenen Modifikationen, denn ist der Grad von $b(z)$ beliebig, so kann man mittels Division Polynome $q(z)$ und $r(z)$ eindeutig bestimmen mit

$$b(z) = a(z) \cdot q(z) + r(z) \quad \text{und} \quad \deg r(z) < \deg a(z).$$

Damit hat man

$$\frac{b(z)}{a(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{a(z)},$$

d.h. bis auf das zusätzliche Polynom $q(z)$ hat man genau die Verhältnisse wir im obigen Theorem.