Lösungen der Aufgabe 5:
(Übungen zum Umgang mit asymptotischer Notation)

1. (a) Die Folge $|a_n|$ ist durch eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ beschränkt:
   $\exists c \in \mathbb{R}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq c.$

   (b) Die Folge $|a_n|$ ist durch jede Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ beschränkt:
   $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   (c) Die Folge $|a_n|$ ist durch eine Konstante $c_1 \in R_+$ nach unten und durch eine Konstante $c_2 \in R_+$ nach oben beschränkt:
   $\exists c_1 \in \mathbb{R}_+ \; \exists c_2 \in \mathbb{R}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : c_1 \leq |a_n| \leq c_2.$

   (d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

   - $(b) \Rightarrow (a), \; (c) \Rightarrow (a), \; (d) \Rightarrow (a), \; (d) \Rightarrow (c)$
   - Wenn man die a_n als ganzzahlig vorraussetzt bedeutet (b), dass für fast alle a_n (alle bis auf endlich viele Ausnahmen) gilt: $a_n = 0$. Ebenso bedeutet (c), dass für fast alle a_n gilt: $a_n = 1$.

2. (a) Wahr für $a_n \equiv b_n$, denn $a_n \sim b_n$ und $a_n - b_n \equiv 0 \in o(1)$. Falsch für $a_n = n, b_n = n - 1$, denn $a_n \sim b_n$ aber $a_n - b_n \equiv 1 \notin o(1)$.

   (b) Wahr, falls $\exists c \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - b_n| = c$.
   Falsch im Allgemeinen: sei $a_n = n^2 + n, b_n = n^2$. Dann gilt $a_n \sim b_n$ aber $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \infty$.

   (c) Wahr, da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{b_n}{a_n} = 0$.

   (d) Wahr wegen (c).

   (e) Wahr für $a_n = 2 \cdot n, b_n = n$. Falsch für $a_n = b_n = n$.

   (f) Wahr für $a_n \equiv b_n \equiv 0$,

falsch im Allgemeinen: $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)/a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - b_n/a_n = 0 \neq 1$.

Alternativ verwendet man $f \sim g \Rightarrow f \in \Theta(g)$ damit folgt (e) falsch $\Rightarrow (f)$ falsch.

$f \sim g \Rightarrow f \in \Theta(g)$ zeigt man wie folgt: $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$ bedeutet: $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |f(n)/g(n) - 1| < \epsilon$. Aus $f(n)/g(n) - 1 < \epsilon$ erhält man $f(n) < (\epsilon + 1) \cdot g(n)$. Aus $1 - f(n)/g(n) < \epsilon$ erhält man $(1 - \epsilon) \cdot g(n) < f(n)$, also $f \in \Theta(g)$.

3. (a) falsch: $n \in O(n^2)$, aber $n^2 \notin O(n)$.

   (b) falsch: sei $a_n = 1$ und $b_n = n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n + b_n \in \Theta(n)$ aber $\min(a_n, b_n) = 1 \in \Theta(1)$.

   (c) falsch: sei $a_n = 2^n$, dann gilt: $\forall c \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$
   $2^n > c \cdot 2^{n/2}$ also gilt: $2^n \notin O(2^{n/2})$.

   (d) falsch: sei $a_n = 1/n$, dann gilt: $\forall c \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$
   $1/n > c \cdot 1/n^2$ also gilt: $1/n \notin O(1/n^2)$.

   (e) richtig: $a_n \in O(b_n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \leq c \cdot b_n$
   $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : b_n \geq 1/c \cdot a_n \ \Rightarrow b_n \in \Omega(a_n)$.

   (f) falsch: sei $a_n = 2n$ und $b_n = n$, dann gilt $a_n \in O(b_n)$ aber
   $2^{a_n} \notin O(2^{b_n})$.

   (g) wahr für $a_n, b_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$: wegen $b_n \in o(a_n)$ gilt: $\forall c \in R_+ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : b_n \leq c \cdot a_n$. Insbesondere gilt dies für $c = 1$. Damit erhalten wir: $a_n \leq a_n + b_n \leq 2 \cdot a_n\ \forall n \geq n_0$.
   Im Allgemeinen ist dies jedoch falsch: Sei $a_n = n, b_n = -n$, dann gilt $a_n + b_n = 0 \notin \Omega(n)$.

4. (a) $f(n) = \log^k n,\ g(n) = n^\alpha$

$f \in o(g)$ (Begründung: l'Hôpital)

(b) $f(n) = n^k,\ g(n) = c^n$

$f \in o(g)$ (Begründung: l'Hôpital)

(c) $f(n) = \sqrt{n},\ g(n) = n^{\sin n}$

Da $n^{\sin n}$ zwischen n und $\frac{1}{n}$ oszilliert, gilt keine der Relationen.

(d) $f(n) = 2^n,\ g(n) = 2^{n/2}$

Offensichtlich gilt $f \in \omega(g)$.

(e) $f(n) = n^{\log c},\ g(n) = c^{\log n}$

Wegen $f \equiv g$ gilt $f \in O(g),\ f \in \Omega(g),\ f \in \Theta(g)$

(f) $f(n) = \log n!,\ g(n) = \log n^n$

Entweder man schätzt $\log n! = \sum_{i=1}^{n} \log(i)$ durch Integrale ab[1], oder man benutzt die Stirlingformel um zu zeigen, dass gilt:

$f \in O(g),\ f \in \Omega(g),\ f \in \Theta(g)$

5. Wegen $f(n) \leq 1 \cdot f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ sind Θ, O, Ω sind reflexiv, nur Θ ist symmetrisch: Angenommen $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :$ $c_1 \cdot g(n) \leq f \leq c_2 \cdot g(n)$. Dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 : 1/c_2 \cdot f(n) \leq$ $g(n) \leq 1/c_1 \cdot f(n)$. Dass o und ω nicht reflexiv sind, und dass O, Ω, o, ω nicht symmetrisch sind, überlege man sich selbst an Gegenbeispielen.

6.

$$1 \overset{(a)}{\approx} \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \prec \log\log n \overset{(b)}{\prec} \sqrt{\log n} \prec \log n \overset{(c)}{\approx} \sum_{k=1}^{n} 1/k \prec \log^2 n \overset{(d)}{\prec} 2^{\sqrt{2\log n}}$$

$$\overset{(e)}{\prec} (\sqrt{2})^{\log n} \approx n \log n \overset{(f)}{\approx} \log(n!) \overset{(g)}{\prec} n^2/\log n \prec n^2 \overset{(h)}{\approx} 4^{\log n} \prec n^3 \overset{(i)}{\approx} \binom{n}{3}$$

$$\overset{(j)}{\prec} n^{\log\log n} \overset{(k)}{\approx} (\log n)^{\log n} \overset{(l)}{\prec} (3/2)^n \prec 2^n \prec n \cdot 2^n \overset{(m)}{\prec} \binom{2n}{2} \overset{(n)}{\prec} n! \overset{(o)}{\prec} 2^{2^{n+1}}$$

[1] siehe z.B. http://www.math.upenn.edu/~wilf/AlgComp3.html → Download Seite 8-9

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi/6$

(b) l'Hôpital

(c) Abschätzung durch Integrale [1]

(d) nach Logarithmieren erhält man $\log\log^2 n = 2\log\log n \in o(\sqrt{2\log n})$

(e) nach Logarithmieren erhält man $\sqrt{2\log n} \in o(1/2\log n)$

(f) siehe 4. (f)

(g) $\log^2 n \in o(n)$

(h) $a^{\log b} = b^{\log a}$

(i) $\binom{n}{3} = (1/6)n^3 - (1/2)n^2 + (1/3)n$

(j) $\lim_{n\to\infty} n^3/n^{\log\log n} = \lim_{n\to\infty} n^{3-\log\log n} = 0$

(k) Logarithmieren

(l) folgt nach Logarithmieren mit $\log\log n \in o(\log n)$ und $\log^2 n \in o(n)$.

(m) mit der Stirlinformel folgt $\binom{2n}{2} \sim 1/\sqrt{\pi n} \cdot 2^{2n}$.

(n) $\log\binom{2n}{2} \in \Theta(n),\ \log n! \in \Theta(n\log n)$

(o) $\log n! \in \Theta(n\log n),\ \log 2^{2^{n+1}} \in \Theta(2^n)$