Darstellungen von Permutationen am Beispiel von $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}([1,4])$

Kommentar zur Tabelle:

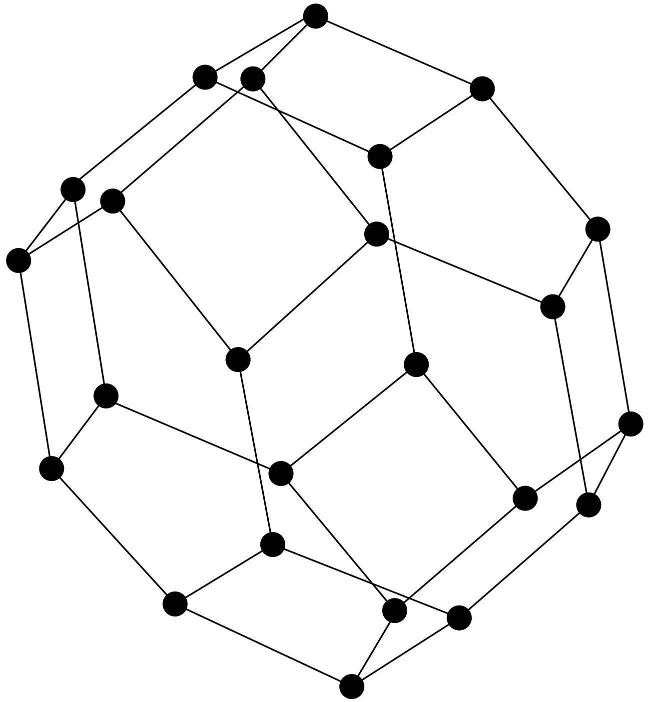
- Die erste Spalte enthält alle $4! = 24$ Vektoren $\mathbf{i} = i_1 i_2 i_3 i_4 \in [0,0] \times [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ in lexicografischer Ordnung, von rechts her gelesen.
- In der zweiten Spalte steht die natürliche Zahl, deren *faktorielle Darstellung* der Vektor $\mathbf{i}$ ist, d.h. $(\mathbf{i})_! = i_1 0! + i_2 1! + i_3 2! + i_4 3!$.
- Die dritte Spalte enthält in Listendarstellung diejenige Permutation $s \in \mathcal{S}([1,4])$, deren *Inversionsvektor* der Vektor $\mathbf{i}$ ist, d.h. $s = \mathtt{ivect}(\mathbf{i})$.
- Die vierte Spalte gibt die Darstellung von $s = \mathtt{ivect}(\mathbf{i})$ als *Produkt* $s = c_1 \circ c_2 \circ \cdots$ *von disjunkten Zyklen* (in Standardform, ohne Fixpunkte).
- Die fünfte Spalte gibt die Darstellung von $s = \mathtt{ivect}(\mathbf{i})$ als *Produkt* $s = c'_1 \circ c'_2 \circ \cdots$ *von disjunkten Zyklen* (in Standardform, mit Fixpunkten).
- In der fünften Spalte wird $s = \mathtt{ivect}(\mathbf{i})$ als *Produkt von Transpositionen* dargestellt, d.h. $s = t_1 \circ t_2 \circ \cdots$, wobei die Anzahl der Faktoren minimal ist.
- In der sechsten Spalte wird $s = \mathtt{ivect}(\mathbf{i})$ als *Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente* dargestellt, wobei die Anzahl der Faktoren minimal ist.
- In der siebten Spalte wird diejenige Permutation s' in Listenform dargestellt, die als *Produkt von genesteten Zyklen* die Exponenten $\mathbf{i}$ hat, d.h. $s' = (12)^{i_2}(123)^{i_3}(1234)^{i_4}$.

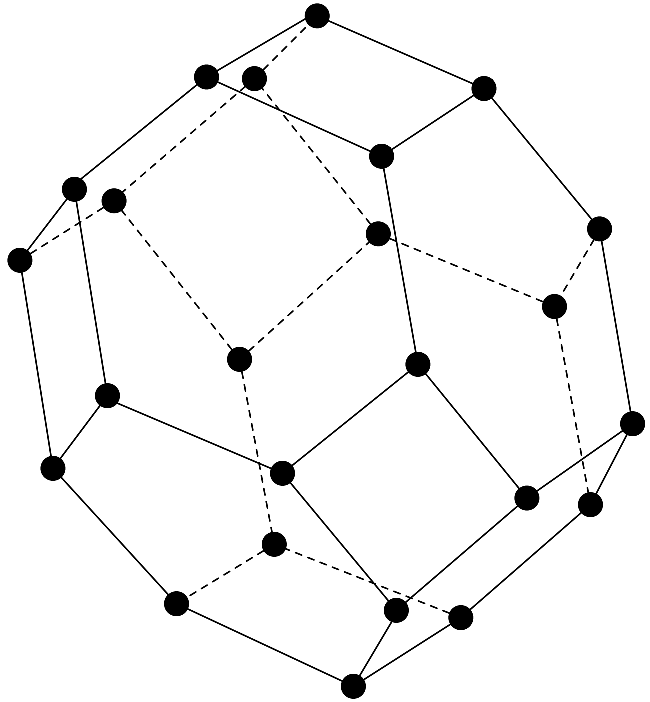
Beachte:

$$\begin{aligned}
s \text{ ist eine gerade Permutation von} [1,n] \quad &\Leftrightarrow \quad i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n \text{ gerade} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Anz. der } c_i \text{ gerader Länge ist gerade} \\
&\Leftrightarrow \quad n - \text{Anzahl der Faktoren } c'_i \text{ ist gerade} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Anzahl der } t_i \text{ ist gerade} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Anzahl der } t'_i \text{ ist gerade}
\end{aligned}$$

$\mathbf{i} = i_1 i_2 i_3 i_4$	$(\mathbf{i})_! =$ $i_2 1! + i_3 2! + i_4 3!$	$s =$ $\mathtt{ivec}^{-1}(\mathbf{i})$	$s =$ $c_1 \circ c_2 \circ \cdots$	$s =$ $c'_1 \circ c'_2 \circ \cdots$	$s =$ $t_1 \circ t_2 \circ \cdots$	$s =$ $t'_1 \circ t'_2 \circ \cdots$	$(12)^{i_2}(123)^{i_3}(1234)^{i_4}$
0000	0	1234	()	(1)(2)(3)(4)	()	()	1234
0100	1	2134	(21)	(21)(3)(4)	(21)	(12)	2134
0010	2	1324	(32)	(1)(32)(4)	(32)	(23)	2314
0110	3	3124	(321)	(321)(4)	(31)(32)	(23)(12)	1324
0020	4	2314	(312)	(312)(4)	(32)(31)	(12)(23)	3124
0120	5	3214	(31)	(2)(31)(4)	(31)	(12)(23)(12)	3214
0001	6	1243	(43)	(1)(2)(43)	(43)	(34)	2341
0101	7	2143	(21)(43)	(21)(43)	(21)(43)	(12)(34)	1342
0011	8	1423	(432)	(1)(432)	(42)(43)	(34)(23)	3142
0111	9	4123	(4321)	(4321)	(41)(42)(43)	(12)(23)(34)	3241
0021	10	2413	(4312)	(4312)	(42)(41)(43)	(12)(34)(23)	1243
0121	11	4213	(431)	(2)(431)	(41)(43)	(24)(23)(12)(23)	2143
0002	12	1342	(423)	(1)(423)	(43)(42)	(23)(34)	3412
0102	13	3142	(4213)	(4213)	(43)(41)(42)	(23)(34)(12)	3421
0012	14	1432	(42)	(1)(3)(42)	(42)	(23)(34)(23)	1423
0112	15	4132	(421)	(3)(421)	(41)(42)	(34)(23)(34)(12)	2413
0022	16	3412	(31)(42)	(31)(42)	(31)(42)	(23)(12)(34)(23)	2431
0122	17	4312	(4231)	(4231)	(41)(43)(42)	(23)(34)(23)(12)(23)	1432
0003	18	2341	(4123)	(4123)	(43)(42)(41)	(12)(23)(34)	4123
0103	19	3241	(413)	(2)(413)	(43)(41)	(23)(12)(23)(34)	4213
0013	20	2431	(412)	(3)(412)	(42)(41)	(12)(34)(23)(34)	4231
0113	21	4231	(41)	(2)(3)(41)	(41)	(12)(34)(23)(12)(34)	4132
0023	22	3421	(4132)	(4132)	(42)(43)(41)	(23)(12)(23)(34)(23)	4312
0123	23	4321	(32)(41)	(32)(41)	(32)(41)	(23)(12)(23)(34)(23)(12)	4321

Das Permutoeder von $\mathcal{S}_4$ als Graph bzw. konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^3$

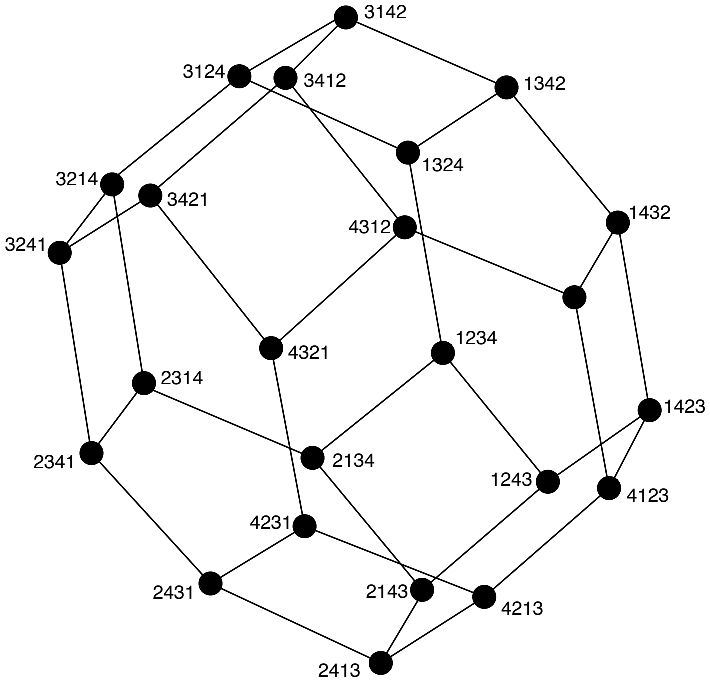


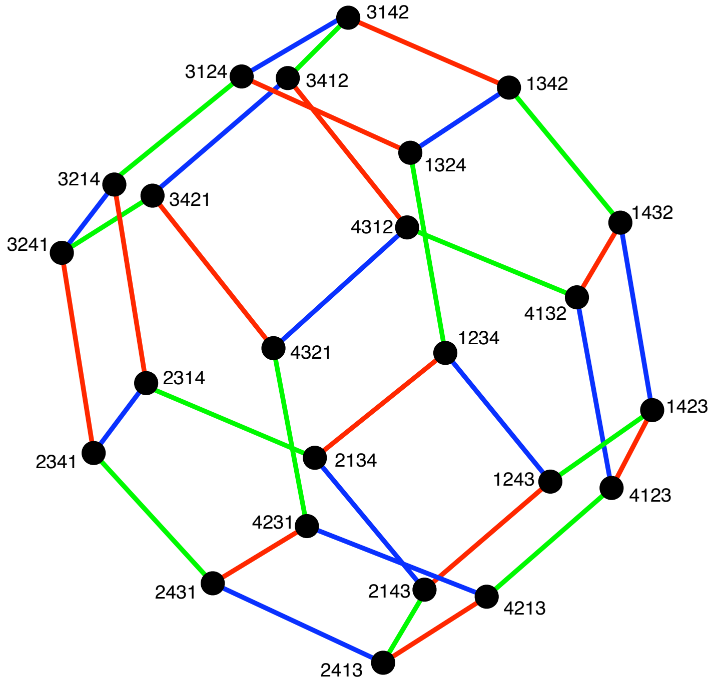


- Das Permutoeder besitzt 24 Knoten, 36 Kanten, 14 Flächen (6 Vierecke und 8 Sechsecke) – man verifiziert EULERs Polyederformel

$$\sharp\text{Knoten} - \sharp\text{Kanten} + \sharp\text{Flächen} = 24 - 36 + 14 = 2$$

Das Permutoeder von $\mathcal{S}_4$





- Rote Kanten: Vertauschen der beiden ersten Komponenten (= Mult. mit (12) von rechts)
- Grüne Kanten: Vertauschen der beiden mittleren Komponenten (= Mult. mit (23) von rechts)
- Blaue Kanten: Vertauchen der beiden letzten Komponenten (= Mult. mit (34) von rechts)