Das Spiel mit den Hüten

Ein Fernsehsender hat folgende Idee für eine Spielshow: in jeder Spielrunde tritt eine Mannschaft, bestehend aus drei Personen an. Diese drei Spieler dürfen vor dem Spiel eine beliebige Strategie verabreden, wie sie sich im Spiel verhalten wollen. Aber nach Spielbeginn dürfen sie nicht mehr miteinander in Kontakt treten und Informationen austauschen. Eine Spielrunde läuft folgendermaßen ab:

- Die drei Mitglieder eines Teams betreten gleichzeitig durch drei verschiedene Türen das Studio. Dabei wird jedem Spieler ein blauer oder roter Hut aufgesetzt. Die Auswahl der Farbe erfolgt für jeden der drei Teilnehmer zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede der beiden Farben. Auch unter den Auswahlen für die verschiedenen Spieler besteht keine Abhängigkeit, so dass es also 8 mögliche Verteilungen der Farben gibt, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit (=1/8) auftreten.
- Beim Betreten des Studios sieht jeder der drei Spieler die Farbe der Hüte seiner beiden Mitpieler, aber nicht diejenige seines eigenen Hutes. Jeder Spieler soll nun die Farbe seines eigenen Hutes raten. Er hat dabei die Wahl zwischen "rot", "blau" und "passe" (= trifft keine Entscheidung). Seine Wahl schreibt er auf einen Zettel, den er dem Showmaster übergibt. Die Spieler erfahren also untereinander nichts über die jeweiligen Entscheidungen.
- Der Showmaster gibt bekannt:
  - Das Team hat gewonnen, falls mindestens einer der Spieler richtig und keiner der Spieler falsch geraten hat.
  - Das Team hat in allen anderen Fällen verloren.

Das soll an einigen Beispielen illustriert werden. Dabei sollen Alice, Bob und Claire ein Team bilden. Mit

$$\begin{array}{ccc||ccc} A & B & C & A & B & C \\ \hline r & r & b & b & * & b \end{array}$$

soll dargestellt werden, dass Alice und Bob einen roten und Claire eine blauen Hut erhalten. Alice rät "blau" und liegt damit falsch. Bob entscheidet sich nicht. Claire rät ebenfalls "blau" und liegt damit richtig. Insgesamt führt das aber zu "verloren", da Alice falsch geraten hat. Dagegen würden

$$\begin{array}{ccc||ccc} A & B & C & A & B & C \\ \hline r & r & b & * & * & b \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc||ccc} A & B & C & A & B & C \\ \hline r & r & b & r & * & b \end{array}$$

zu einem Gewinn führen. Bei

$$\begin{array}{ccc||ccc} A & B & C & A & B & C \\ \hline r & r & b & * & * & * \end{array}$$

hat niemand falsch, aber auch niemend richtig geraten, deshalb ist in diesem Fall das Spiel verloren.

Der Fernsehsender will das Spiel mit Geldpreisen attraktiv machen. Deshalb interessiert er sich für die Gewinnaussichten. Dazu sollte man einige mögliche Strategien durchspielen, die ein Team verabreden könnte.

1. Eine erste Strategie könnte darin bestehen, dass jeder Spieler zwischen "blau" und "rot" mit gleicher Wahrscheinlichkeit (=1/2) wählt. Von der Möglichkeit der Enthaltung wird dabei nicht Gebrauch gemacht. Das ist aber offensichtlich ganz schlecht für das Team, denn dann müssen alle richtig raten, um zu gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist aber gerade mal $(1/2)^3 = 1/8$.

2. Bei einer zweiten Strategie benutzen die Spieler die Möglichkeit zur Enthaltung. Jeder wählt zwischen den drei Alternativen "blau", "rot" und "passe" mit Wahrscheinlichkeit 1/3. Eine kleine Rechnung zeigt, dass dann die Gewinnwahrscheinlichkeit auf 7/27 anwächst, aber immer noch sehr bescheiden ist.

3. Mit einer ganz einfachen Strategie kann das Team eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/2 erreichen: sie verabreden, dass Alice und Bob immer mit "passe" antworten und Claire immer mit "blau" (oder irgendwie sonst mit einer der beiden Farben).

4. Es erscheint auf den ersten Blick verblüffend, dass es sogar eine Strategie gibt, mit der das Team seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf 3/4 steigen kann! Und das geht so:

   - Jeder der drei Teilnehmer verhält sich nach dem gleichen Rezept:
     - sieht er auf den Köpfen der beiden Mitpieler Hüte verschiedener Farbe, so wählt er "passe";
     - sieht er er auf den Köpfen der beiden Mitpieler Hüte gleicher Farbe, so wählt er die andere Farbe.

   Typische Beispiele wären also:

A	B	C	A	B	C
r	r	b	$*$	$*$	b
b	r	b	$*$	r	$*$
r	r	r	b	b	b

   von denen die beiden ersten Verteilungen zum Gewinn und die letzte zum Verlust führen. Tatsächlich führen genau zwei von acht Verteilungen zu Verlust

A	B	C	A	B	C
b	b	b	r	r	r
r	r	r	b	b	b

   und das erklärt die Gewinnwahrscheinlichkeit von 3/4.

Problem: Was passiert, wenn man dieses Spiel mit Teams spielt, die mehr als drei Teilnehmer haben? Probieren Sie! Tatsächlich gilt: spielt man dieses Spiel mit 7 Teilnehmern pro Team, so kann man die Gewinnwahrscheinlichkeit auf 7/8 steigern! Können Sie sich eine Strategie ausdenken, die das leistet?