- Idee: Nicht-konstruktive Existenzbeweise für Strukturen mit bestimmten Eigenschaften
- Drei Beispiele
  - Das MaxCut-Problem
  - Das MaxSat-Problem
  - Das Ramsey-Problem
- Probabilistische Formulierung

- Das MaxCut-Problem
  - $G = (V, E)$ Graph mit Knotenmenge V, $\sharp V = n$, Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$, $\sharp E = m$.
  - *Schnitt* von G: $c = (A, B)$ mit $A, B \subseteq (V), A \cap B = \emptyset, A \cup B = V$.
  - Wert von c:

$$v(c) := \sharp\{e \in E\,;\, e = \{a, b\} \text{ mit } a \in A, b \in B\}$$

  - MaxCut: bestimme Schnitt v, für den $v(c)$ maximal wird, bzw. bestimme

$$v(G) = \max_{c=(a,b) \text{ Schnitt von } G} v(c)$$

  - Das Problem MaxCut ist NP-hart!
(im Gegensatz zum entsprechenden Minimierungsproblem $\longrightarrow$ Flüsse in Netzwerken)

- Behauptung: $v(G) \geq \frac{m}{2}$, d.h. es gibt in jedem Graphen G immer einen Schnitt c mit $v(c) \geq \frac{m}{2}$.
- Beweis: Definiere für jede Kante $e \in E$ und jeden Schnitt $c = (A, B)$ von G:

$$\chi_e(c) := \begin{cases} 1 & \text{falls } e = \{a, b\} \text{ und } a \in A, b \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist für jeden Schnitt $c = (A, B)$ von G und jede Kante $e \in E$

$$v(c) = \sum_{e \in E} \chi_e(c) \quad \text{und} \quad \sum_{c \text{ Schnitt von } G} \chi_e(c) = 2^{n-1}$$

- (Forts.)

$$\begin{aligned} \sum_{c \text{ Schnitt v.} G} v(c) &= \sum_{c \text{ Schnitt v.} G} \sum_{e \in E} \chi_e(c) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{c \text{ Schnitt v.} G} \chi_e(c) \\ &= \sum_{e \in E} 2^{n-1} = m \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

Die Summe (links) hat 2^n Glieder, es muss also mindestens ein Glied geben, das einen Beitrag $\geq \frac{m}{2}$ liefert!
Also ist $v(G) \geq \frac{m}{2}$.
Dies zeigt nicht, wie man einen solchen maximalen Schnitt findet!

- Das MaxSat-Problem
  - $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ aussagenlogische Variable, $V_n = X_n \cup \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_1}\}$ Literale
  - AL Formel in Klauselform (konjunktive Normalform)

    $$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$$

    wobei die Klauseln C_i Disjunktionen von Literalen sind.
  - Keine Klausel enthalte zueinander komplementäre Literale.
  - Bewertung $\phi : X_n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ wird zu Bewertung von Literalen, Klauseln und Formeln wie üblich fortgesetzt.
  - Wert von ϕ:

    $$v(\phi) := \sharp\{C_i\,;\, \phi(C_i) = \mathbf{t}\,\}$$

  - MaxSat: finde zu Formel F Bewertung ϕ, die möglichst viele der Klauseln wahr macht, bzw. bestimme

    $$v(F) = \max_{\phi} v(\phi)$$

  - Das Problem MaxSat ist NP-hart!

- $v(F) \geq \frac{m}{2}$, d.h. es gibt immer eine Bewertung ϕ, die mindestens die Hälfte der Klauseln von F wahr macht.
- Beweis: siehe Übungen!
- der Beweis zeigt nicht, wie man ein solches ϕ findet!

- Das Ramsey-Problem (einfachster Fall)
  - Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $R(k)$ die kleinste Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:
    Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $\sharp V \geq N$ enthält eine k-Clique oder eine k-Coclique.
  - Bekannte Werte: $R(2) = 2, R(3) = 6, R(4) = 18$.
  - Es gilt:

    $$2^{\frac{k-2}{2}} \leq R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

    (also exponentielles Wachstum).

- Beweis der oberen Schranke
  - Definiere für $a, b \in \mathbb{N}$: $R(a, b)$ ist die kleinste Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:
    Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $\sharp V \geq N$ enthält eine a-Clique oder eine b-Coclique.
  - Offenbar gilt $R(a, 1) = 1 = R(1, b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.
  - Es gilt die Rekursionsungleichung (siehe nächste Seite)

    $$R(a+1, b+1) \leq R(a+1, b) + R(a, b+1) \quad (a, b \in \mathbb{N})$$

  - Aus den Induktionsannahmen

    $$R(a+1, b) \leq \binom{a+b-1}{a} \quad R(a.b+1) \leq \binom{a+b-1}{b}$$

    folgt

    $$R(a{+}1, b{+}1) \leq \binom{a+b-1}{a} + \binom{a+b-1}{b} \leq \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

- Beweis der oberen Schranke (Forts.)
  - Es gilt also

$$R(a+1,b+1) \leq \binom{a+b}{a} \quad (a,b \in \mathbb{N})$$

und insbesondere

$$R(k+1) = R(k+1,k+1) = \binom{2k}{k}$$

- Beweis der Rekursionsungleichung:
  $G=(V,E)$ enthalte weder eine $(a+1)$-Clique, noch eine $(b+1)$-Coclique, d.h. es ist $\sharp V < R(a+1,b+1)$.
  $v \in V$ sei beliebiger Knoten,
  $A_v = \{u \in V\,;\, \{u,v\} \in E\}$, $B_v = \{u \in V\,;\, \{u,v\} \notin E\}$,
  - $G_v' = (A_v, E|_{A_v})$ enthält weder eine a-Clique, noch eine $(b+1)$-Coclique, also $\sharp A_v < R(a,b+1)$,
  - $G_v'' = (B_v, E|_{B_v})$ enthält weder eine $(a+1)$-Clique, noch eine b-Coclique, also $\sharp B_v < R(a+1,b)$.

  Somit ist

$$\sharp V = \sharp A_v + \sharp B_v + 1 < R(a,b+1) + R(a+1,b)$$

und speziell mit $\sharp V = R(a+1,b+1)-1$ folgt:

$$R(a+1,b+1) \leq R(a+1,b) + R(a,b+1)$$

- Beweis der unteren Schranke
  - $\Omega_n =$ alle Graphen G mit Knoten $V_n = \{1,2,\ldots,n\}$
  - $\sharp\Omega_n = 2^{\binom{n}{2}}$
  - Für $G \in \Omega_n$, $A \subseteq V_n$ mit $\sharp A = k$ sei

$$\chi_A(G) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eine } k\text{-Clique oder } k\text{-Coclique von } G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Anzahl der k-Clique und k-Cocliquen eines Graphen G

$$\nu(G) = \sum_{\substack{A \subseteq V_n \\ \sharp A = k}} \chi_A(G)$$

  - Offensichtlich gilt für jedes $A \subseteq V_n$ mit $\sharp A = k$:

$$\sum_{G \in \Omega_n} \chi_A(G) = 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

- Beweis der unteren Schranke (Forts.)
  - Nun folgt

$$(*) \quad \sum_{G \in \Omega_n} \nu(G) = \sum_{G \in \Omega_n} \sum_{\substack{A \subseteq V_n \\ \sharp A = k}} \chi_A(G)$$
$$= \sum_{\substack{A \subseteq V_n \\ \sharp A = k}} \sum_{G \in \Omega_n} \chi_A(G) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

  - Die Summe $(*)$ hat $2^{\binom{n}{2}}$ Glieder.
  - Speziell für $n = 2^{\frac{k-2}{2}}$ ist

$$\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < n^k \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} = 2^{\binom{n}{2}+1-\frac{k}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}$$

  - Mindestens einer der Terme der Summe $(*)$ muss einen Beitrag < 1 liefern.

- Beweis der unteren Schranke (Forts.)
  - Folgerung: es muss ein $G \in \Omega_n$ geben mit $v(G) < 1$. Dann bleibt aber nur $v(G) = 0$, d.h. G hat weder eine k-Clique, noch eine k-Coclique.
  - Es ist nicht klar, wie man ein solches G findet!

- Das eben gezeigte Resultat ist der Spezialfall eines Satzes von F.P. Ramsey (1930):
- r, k, ℓ seien natürliche Zahlen. Dann gibt es eine natürliche Zahl $N = N(r, k, \ell)$ mit der Eigenschaft:
  - Färbt man die k-elementigen Teilmengen einer N-elementigen Menge A auf irgendeine Weise mit r Farben, so gibt es immer eine ℓ-elementige Menge $B \subseteq A$, deren sämtliche k-elementigen Teilmengen dieselbe Farbe haben.
- Der vorangehende Satz behandelt den Fall $k = 2, r = 2$.
- Der Fall $k = 1$ entspricht dem Schubfachprinzip.
- Der Beweis im allgemeinen Fall benutzt eine analoge Induktion.
- Daraus hat sich eine umfangreiche Theorie entwickelt, die nach diesem englischen Logiker benannt ist.

- Simple Tatsache:
  - Ω sei endliche Menge, $P : \Omega \to [0, 1]$ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω, d.h. $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$.
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable mit Erwartungswert

$$E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$$

  - Dann gibt es ein $\omega \in \Omega$ mit $X(\omega) \geq E[X]$ (analog mit $\leq$).

- Erweiterung:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_m$ seien Zufallsvariable, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ (Unabhängigkeit wird nicht vorausgesetzt!)
  - Dann gibt es ein $\omega \in \Omega$ mit $X(\omega) \geq E[X] = \sum_{1\leq i\leq m} E[X_i]$ (analog mit $\leq$).
  - Das ist von Interesse, wenn man die $E[X_i]$ und damit $E[X]$ ausrechnen kann.

- MaxCut-Problem
  - $G = (V, E)$ endlicher Graph mit $\sharp V = n$ und $\sharp E = n$.
  - $\Omega_n := \{\text{Schnitte } c = (A, B) \text{ von } G\}$ mit Gleichverteilung $P_n(c) = \frac{1}{2^n}$ $(c \in \Omega_n)$
  - Für jedes $e = \{a, b\} \in E$ ist $\chi_e : \Omega_n \to \{0, 1\}$ Zufallsvariable auf (Ω_n, P_n) mit
  $$E[\chi_e] = \frac{1}{2}$$
  - $v = \sum_{e \in E} \chi_e$ ist Zufallsvariable auf (Ω_n, P_n) mit
  $$E[v] = \sum_{e \in E} E[\chi_e] = \frac{m}{2}$$
  - Es muss also ein $c \in \Omega_n$ geben mit $v(c) \geq \frac{m}{2}$.

- MaxSat-Problem
  - $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ aussagenlogische Formel in Klauselform mit Variablen $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  - $\Omega_n = \{\text{Bewertungen } \phi : X_n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}\}$ mit Gleichverteilung $P_n(\phi) = \frac{1}{2^n}$
  - Für jede Klausel C_i ist $\chi_i : \Omega_n \to \{0, 1\}$ eine Zufallsvariable auf (Ω_n, P_n) mit
  $$E[\chi_i] = 1 - \frac{1}{2^{n-k}} \geq \frac{1}{2}$$
  - $v = \sum_{1 \leq i \leq m} \chi_e$ ist Zufallsvariable auf (Ω_n, P_n) mit
  $$E[v] = \sum_{1 \leq i \leq m} E[\chi_e] \geq \frac{m}{2}$$
  - Es muss also ein $\phi \in \Omega_n$ geben mit $v(\phi) \geq \frac{m}{2}$.

- Ramsey-Problem
  - $\Omega_n = \{\text{Graphen } G = (V_n, E)\}$, wobei $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit Gleichverteilung $P_n(G) = 2^{-\binom{n}{2}}$
  - Für $A \subseteq V_n$ mit $\sharp A = k$ ist $\chi_A : \Omega_n \to \{0, 1\}$ eine Zufallsvariable auf (Ω_n, P_n) mit
  $$E[\chi_A] = 2^{-\binom{k}{2}+1}$$
  - $v = \sum_{\substack{A \subseteq V_n \\ \sharp A = k}} \chi_A$ ist Zufallsvariable auf (Ω_n, P_n) mit
  $$E[v] = \sum_{\substack{A \subseteq V_n \\ \sharp A = k}} E[\chi_A] = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}+1}$$
  - Für $n \geq 2^{\frac{k-2}{2}}$ ist $E[v] < 1$. Es muss dann also ein $G \in \Omega_n$ geben mit $v(G) < 1$, d.h. $v(G) = 0$.