Landaus asymptotische Notation

$$O, \Omega, o, \omega, \Theta, \sim$$

- wird vorausgesetzt
- siehe Folien auf webseite
- oder einschlägige Literatur (z.B. Cormen, Leiserson, Rivest)





Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \begin{cases} \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ n+1 & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

folgt aus der Polynomgleichung

$$(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n)(1 - X) = 1 - X^{n+1}$$





Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \begin{cases} \text{konvergiert gegen } \frac{1}{1-\alpha} & \text{für } |\alpha| < 1 \\ \text{divergiert für } |\alpha| \geq 1 \end{cases}$$





Anwendung: das Master-Theorem für divide-and-conquer-Rekursionen (einfachste Version)

Die Lösung der Rekursion

$$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + c \cdot n,\ T(1) = d$$

mit $a, c, d \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{N}_{>0}$ verhält sich so:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n) & \text{falls } a < b \\ \Theta(n \log n) & \text{falls } a = b \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Zum Beweis: man lässt sinvollerweise die Rekursion über Potenzen von $b$ laufen. Mit $n = b^k$ und $t_k := T(b^k)$ erhält man

$$t_k = a \cdot t_{k-1} + c \cdot b^k \ (k > 0), t_0 = d$$

Dies ist eine inhomogene lineare Rekursion erster Ordnung für die $(t_k)_{k \geq 0}$.
Rückwärtsentwickeln der Rekursion (Induktion!) liefert

$$t_k = a^\ell \cdot t_{k-\ell} + c \cdot (a^{\ell-1}b^1 + a^{\ell-2}b^2 + \cdots + a^0 b^\ell) \quad (0 \leq \ell \leq k)$$

und somit für $\ell = k$:

$$\begin{aligned} t_k &= a^k \cdot t_0 + c \cdot b^k \cdot \left( \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-2} + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^0 \right) \\ &= \begin{cases} a^k \cdot d + c \cdot b^k \cdot \frac{1-(\frac{a}{b})^k}{1-\frac{a}{b}} & \text{falls } a \neq b \\ b^k \cdot d + c \cdot b^k \cdot k & \text{falls } a = b \end{cases} \end{aligned}$$





Damit ist

$$t_k \sim \begin{cases} \frac{c \cdot b}{b-a} \cdot b^k & \text{falls } a < b \\ c \cdot k \cdot b^k & \text{falls } a = b \\ (d + \frac{c \cdot b}{a-b}) \cdot a^k & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Jetzt muss man das nur noch auf die $T(n)$ umformen und dabei $b^k = n$, $k = \log_b n$ und $a = b^{\log_b a}$ beachten.





Binomialformel, Binomialkoefizienten
Für $x \in \mathbb{C}$ (allgemeiner: kommutativer Ring) gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Beachte: $n \mapsto \binom{n}{k}$ ist ein Polynom $k$-ten Grades in $n$.
Vereinbarung: $\binom{n}{k} = 0$ falls $k < 0$ oder $k > n$.





Einige Formeln

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} \frac{n+1}{n-k+1}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Bedeutung

- PASCALsches Dreieck
  (Omar Khayyám (1050–1123), Yuang Hui (1261), Chu Shih-Chieh (1303), Blaise Pascal (1623) )
- $\binom{n}{k}$ ist
  - die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge
  - die Anzahl der Bitvektoren der Länge $n$ mit HAMMING-Gewicht $k$
  - die Anzahl der diagonalen Gitterwege in einem $k \times (n-k)$-Gitter





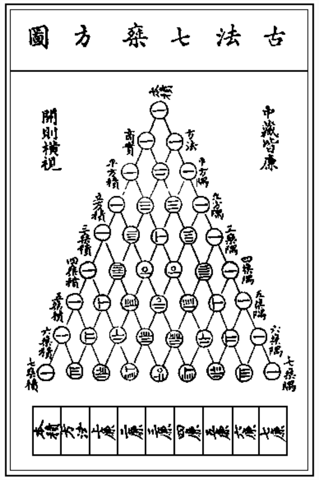


Abbildung: aus Ssu Yuan Yu (1303) von CHU SHIH-CHIEH





Binomialreihe (NEWTON)
Für $\alpha \in \mathbb{C}$ hat die Funktion

$$x \mapsto (1+x)^\alpha$$

die für $|x| < 1$ konvergierende Reihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$





Die Binomialreihe ergibt sich als Taylorentwicklung in $x = 0$ wegen

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (1+x)^\alpha |_{x=0} = \binom{\alpha}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- Für $\alpha = -1$ hat man die die geometrische Reihe.
- Für $\alpha \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe nach dem Term $\ldots + x^\alpha$ ab. Das ist die Situation der Binomialformel.
- Für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ hat die Reihe unendlich viele Terme.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ möchte man das asymptotische Verhalten von Potenzsummen

$$S_\alpha(N) = \sum_{n=0}^{N} n^\alpha = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + N^\alpha$$

kennen.





Beispiele:

$$\begin{aligned}
S_1(N) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + N &&= \frac{N(N+1)}{2} && \in \Theta(N^2)\\
S_2(N) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 &&= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} && \in \Theta(N^3)\\
S_3(N) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 &&= S_1(N)^2 && \in \Theta(N^4)\\
S_{-1}(N) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} &&= ? && \in \Theta(?)
\end{aligned}$$





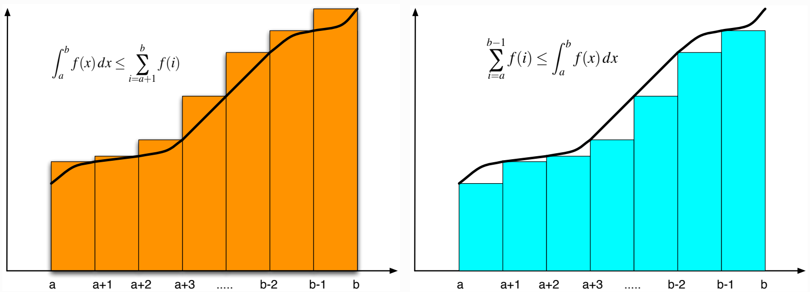


Abbildung: Abschätzung durch Ober- und Untersumme





Für die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ ergibt das:

- für $\alpha > 0$:

$$S_\alpha(N-1) \le \int_1^N x^\alpha dx \le S_\alpha(N) - 1$$

$$1 + \int_1^N x^\alpha dx \le S_\alpha(N) \le \int_1^{N+1} x^\alpha dx$$

- für $\alpha < 0$:

$$S_\alpha(N) - 1 \le \int_1^N x^\alpha dx \le S_\alpha(N-1)$$

$$\int_1^{N+1} x^\alpha dx \le S_\alpha(N) \le 1 + \int_1^N x^\alpha dx$$

Beachte

$$\int_1^N x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha}(N^{\alpha+1}-1) & \alpha \neq -1 \\ \ln N & \alpha = -1 \end{cases}$$

Daher

$$S_\alpha(N) \begin{cases} \in \Theta(N^{\alpha+1}) & \text{für } \alpha > -1 \\ \in \Theta(\log N) & \text{für } \alpha = -1 \\ \text{konvergiert} & \text{für } \alpha < -1 \end{cases}$$





Beispiele:

$$S_{-2}(N) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi^2}{6}$$

$$S_{-4}(N) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi^4}{90}$$

($\rightarrow$ Bernoulli-Zahlen und -Polynome)





Hinweis: eingehendere Untersuchungen führen auf Riemanns *Zetafunktion*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-z}}$$

$\rightarrow$ Zahlentheorie, Riemanns Vermutung





Folgerung: Ist

$$a(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_m X^m \quad (a_m \neq 0)$$

ein Polynom $m$-ten Grades, so wächst die Funktion

$$N \mapsto \sum_{n=1}^{N} a(n)$$

wie ein Polynom $(m+1)$-ten Grades, d.h. $\sum_{n=1}^{N} a(n) \in \Theta(N^{m+1})$.

Genauer: es gibt ein Polynom vom Grad $m+1$

$$b(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_{m+1} X^{m+1} \quad (b_{m+1} \neq 0)$$

mit

$$b(X+1) - b(X) = a(X)$$

und $b(X)$ ist bis auf die *Summationskonstante* $b_0$ eindeutig bestimmt.
Man schreibt $\Delta b(X) = a(X)$ (Differenzenoperator). $b(X)$ ist die *diskrete Stammfunktion* von $a(X)$.





Der Fall $\alpha = -1$: harmonische Zahlen

$$H_N = S_{-1}(N) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

Man kann zeigen

$$H_N = \gamma + \ln N + \frac{1}{2n} + \sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{\binom{x}{k}}{\binom{N}{k}} \, dx$$

mit $\gamma = 0.57721\ldots$ EULERsche Konstante.

| $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_N$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{25}{12}$ | $\frac{137}{60}$ | $\frac{49}{20}$ | $\frac{363}{140}$ | $\frac{761}{280}$ | $\frac{7129}{2520}$ | $\frac{7381}{2520}$ |





Wie kann man das asymptotische Wachstum der Fakultätsfunktion

$$N \mapsto N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (N-1) \cdot N$$

beschreiben?

Wichtige Bedeutung:
$N!$ ist die Anzahl der Permutationen von $N$ Elementen.

| $N$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N!$ | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362880 | 3628800 |





Integralabschätzung für $x \mapsto \ln x$ ergibt

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln n \leq \int_1^N \ln x \, dx \leq \sum_{n=2}^{N} \ln n$$

und somit

$$[x \ln x - x]_1^N \leq \ln N! \leq [x \ln x - x]_1^{N+1}$$

und das ergibt

$$N \ln N - N + 1 \leq \ln N! \leq (N+1)\ln(N+1) - (N+1) + 1$$

und somit

$$\ln N! \in \Theta(N \log N)$$

Zusammen mit

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

erhält man

$$\left(\frac{N}{e}\right)^N < N! < N \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

Bessere Abschätzungen erhält man, indem man $\int \ln x \, dx$ mit Polygonzügen approximiert.





Stirlings Formel

$$\begin{aligned} n! &= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\cdots\right) \\ &= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\cdot e^{\alpha_n} \end{aligned}$$

wobei $1/(12n+1) < \alpha_n < 1/(12n)$.





Folgerung

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\log n! = n \log n - 1.41\ldots \cdot n + o(n)$$





Eingehendere Untersuchungen führen auf die *Gammafunktion* (Euler)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^t dt \quad (\Re z > 0)$$

Dies ist eine in die komplexe Ebene fortgesetzte Fakultätsfunktion, denn es gilt

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

also wegen $\Gamma(1) = 1$ insbesondere

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbb{N}_{>0})$$

Gammafunktion und Zetafunktion hängen eng zusammen.

Einfache Abschätzung für Binomialkoeffizienten:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \overset{(*)}{\leq} \binom{n}{k} \overset{(**)}{\leq} \left(\frac{e\cdot n}{k}\right)^k$$

(*) wegen

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k = \frac{n\cdot n\cdots n}{k\cdot k\cdots k} \leq \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{1} = \binom{n}{k}$$

(**) wegen

$$e^k = e^{\frac{k}{n}\cdot n} \geq (1+\frac{k}{n})^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^j \geq \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^k$$





Mit Hilfe der der Entropiefunktion

$$H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x) \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

erzielt Shannon eine sehr genaue Abschätzung:

$$\frac{2^{n\cdot H(\lambda)}}{\sqrt{8n\lambda\mu}} \leq \binom{n}{\lambda n} \leq \frac{2^{n\cdot H(\lambda)}}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}}$$

wobei $0 < \lambda < 1$ und $\mu = 1-\lambda$.
Damit gilt insbesondere:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\binom{n}{\lambda n} = H(\lambda)$$





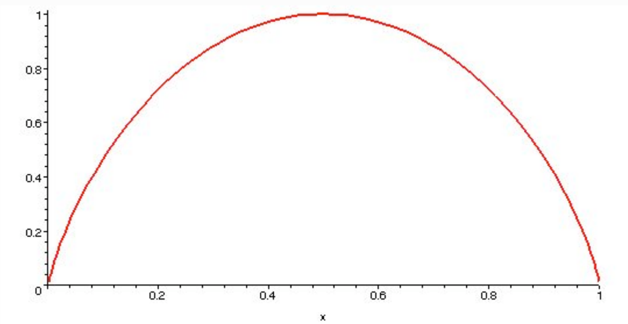


Abbildung: Graph der Entropiefunktion $H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$





Beispiel:

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{2nH(1/2)}}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Anwendung: die Anzahl binärer Bäume mit $n$ inneren Knoten ist

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}\right)$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 | 16796 |

(Catalan-Zahlen)