- Zweidimensionale Quelle

$$\mathcal{P} = \langle A \times B, \mathbf{p} = (p_{a,b})_{(a,b)\in A\times B}\rangle$$

A, B endliche Alphabete, $\mathbf{p} = (p_{a,b})_{(a,b)\in A\times B}$ WV (Matrix)
- Der Vektor $(r_a)_{a\in A}$ der Zeilensummen

$$r_a = \sum_{b\in B} p_{a,b}$$

ist eine WV auf $A \to$ Quelle $\mathcal{R} = \langle A, (r_a)_{a\in A}\rangle$.
- Der Vektor $(c_b)_{b\in B}$ der Spaltensummen

$$c_b = \sum_{a\in A} p_{a,b}$$

ist eine WV auf $B \to$ Quelle $\mathcal{C} = \langle C, (r_b)_{b\in B}\rangle$.
- Die Quellen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ heissen Marginalquellen zu $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}$ Produktquelle zu $\mathcal{R}, \mathcal{C}$, geschrieben $\mathcal{P} = \mathcal{R} \times \mathcal{C}$ falls

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{c}, \quad \text{d.h. } p_{a,b} = r_a \cdot c_b \quad \text{für alle } (a,b) \in A \times B$$

- Beispiel: $\mathcal{P} = \langle A \times B, \mathbf{p}\rangle$ mit $A = \{a, b\}, B = \{x, y, z\}$ und

$$\mathbf{p} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.05 & 0.15 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Marginalquellen:

$$\mathcal{R} = \langle A = \{a, b\}, \mathbf{r} = \{0.4, 0.8\}\rangle$$

$$\mathcal{C} = \langle B = \{x, y, z\}, \mathbf{c} = \{0.3, 0.25, 0.45\}\rangle$$

Produkt der Marginalquellen: $\mathcal{R} \times \mathcal{C} = \langle A \times B, \mathbf{r}\cdot\mathbf{c}\rangle$ mit

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.25 & 0.45 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 0.12 & 0.1 & 0.18 \\ 0.18 & 0.15 & 0.27 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Entropien

$$\begin{aligned} H(\mathcal{P}) &= 2.408694969\ldots \\ H(\mathcal{R}) &= 0.970950594\ldots \\ H(\mathcal{C}) &= 1.539491070\ldots \\ H(\mathcal{R} \times \mathcal{C} &= 2.510441664\ldots \end{aligned}$$

- Es gilt im Beispiel

$$\begin{aligned} H(\mathcal{P}) &\le H(\mathcal{R}) + H(\mathcal{C}) \\ H(\mathcal{R}\times\mathcal{C}) &= H(\mathcal{R}) + H(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

- Zeigen Sie die Ungleichung

$$H(\mathcal{P}) \le H(\mathcal{R}) + H(\mathcal{C})$$

- Zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn die beiden Marginalquellen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ unabhängig sind, d.h. wenn

$$p_{a,b} = r_a \cdot c_b \quad \text{für alle } (a,b) \in A \times B$$

gilt, also $\mathcal{P} = \mathcal{R} \times \mathcal{C}$.

Hinweis: das "key lemma" benutzen!

- Auf der Menge $\mathbb{B}^n$ der Bitstrings der Länge n als Alphabet wird mit Hilfe eines p mit $0 \leq p \leq 1$ eine Quelle definiert, bei der jedes $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeit

$$bin_p^{(n)}(w) = p^{||w||}(1-p)^{n-||w||}$$

erhält. Dabei ist $||w|| = \sharp_1(w)$ das sog. HAMMING-Gewicht.

- Welches ist die Entropie $H_p^{(n)}$ der Quelle $Q_p^{(n)} = \left(\mathbb{B}^n, bin_p^{(n)}\right)$? Drücken Sie dies mit Hilfe der Entropiefunktion $H(x, 1-x)$ aus.

- Sei $\mu_p^{(n)}$ die mittlere (erwartete) Wortlänge eines optimalen Präfixcodes für die Quelle $Q_p^{(n)}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_p^{(n)}}{n} = H(p, 1-p).$$

- Berechnen Sie für die Quelle $Q_{1/8}^{(3)}$ deren Entropie, sowie einen optimalen binären Präfixcode und bestimmen Sie dessen mittlere (erwartete) Wortlänge.

  (Hinweis: verwenden Sie bei der Berechnung der Entropie den numerischen Wert $\log_2 7 = 2.80735\ldots$; bei der Berechnung des Codes ist es bequemer, mit Häufigkeiten statt mit Wahrscheinlichkeiten zu rechnen.)