Splitter

- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$
- σ *splittet an Position* j oder j ist ein *Splitter* in σ, wenn

$$\sigma_i < \sigma_j \text{ für } i < j \text{ und } \sigma_j < \sigma_k \text{ für } j < k$$

  Splitter sind (spezielle) Fixpunkte, d.h. $s_j = j$.
- Beispiele
  - $(3,1,2,4,7,5,6)$ hat 4 als Splitter
  - $(5,1,2,4,7,3,6)$ hat keinen Splitter
  - $(1,2,3,4,5,6,7)$ hat alle 7 Positionen als Splitter
- Problem: wieviele Splitter hat eine Permutation *im Mittel*?

Die Gesamtzahl der Splitter in $\mathcal{S}_n$

- Die Position j ist ein Splitter in $(j-1)! \cdot (n-j)!$ Permutationen aus $\mathcal{S}_n$.
- Die Gesamtzahl s_n der Splitter in $\mathcal{S}_n$

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} (j-1)!\,(n-j)! = (n-1)! \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^{-1}$$

- Wie geht man mit folgender Summe um?

$$\frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \cdots \frac{1}{\binom{n}{n}}$$

- Hier hilft das *Beta-Integral*

$$\frac{1}{a+b+1}\binom{a+b}{a}^{-1} = \int_0^1 t^a\,(1-t)^b dt$$

- Mit Beta-Integral ergibt sich

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = (n+1)\underbrace{\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^k (1-t)^{n-k} dt}_{a_n}$$

- Die Zahlen n_n genügen einer einfachen Rekursion:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n+2} \quad , \quad a_0 = 1$$

  Beweis:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{a_n}{2} &= \int_0^1 t^{n+1} dt + \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left[t^k (1-t)^{n+1-k} - \frac{1}{2} t^k (1-t)^{n-k} \right] dt \\ &= \frac{1}{n+2} + \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} t^k (1-t)^{n-k} \right] \left(\frac{1}{2} - t \right) dt \end{aligned}$$

Folgerung

- mittlere Anzahl von Splittern in $\mathcal{S}_n$

$$\bar{s}_n = \frac{s_n}{n!} = \frac{b_{n-1}}{n} = a_{n-1}$$

- Rekursion für $\bar{s}_n$

$$\bar{s}_{n+1} = \frac{\bar{s}_n}{2} + \frac{1}{n+1} \quad , \quad \bar{s}_1 = 1$$

- Daraus ergibt sich

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \bar{s}_n = 2, \quad \text{also} \quad \bar{s}_n \sim \frac{2}{n}$$