

Beispiel "Autosegmentale Phonologie" mit Transfermatrix-Methode

Transfermatrix für das Verbindungsproblem:

Codierung der Verbindungsstrukturen durch Zustände:

- 1 = p (= previous) --p, pc, pcf
- 2 = c (= current) --p, c, pc, pcf, cf
- 3 = f (= following) --c, f, cf
- 4 = pc(= previous and current) --> p, c, pc, pcf, cf
- 5 = pcf(= previous and current and following) --> c, f, cf
- 6 = cf(= current and following) -->c, f, cf

```
> A := array(1..6,1..6, [  
  [1,0,0,1,1,0],  
  [1,1,0,1,1,1],  
  [0,1,1,0,0,1],  
  [1,1,0,1,1,1],  
  [0,1,1,0,0,1],  
  [0,1,1,0,0,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
```

Berechnung des charakteristischen Polynoms der Transfermatrix

```
> charpoly(A,lambda);
```

$$\lambda^6 - 5\lambda^5 + 5\lambda^4 - \lambda^3$$

Berechnung des Minimalpolynoms

```
> minpoly(A,lambda);
```

$$-\lambda + 5\lambda^2 - 5\lambda^3 + \lambda^4$$

```
> factor(%);
```

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

Die Faktorisierung deutet schon an, dass das Ergebnis nicht sehr kompliziert sein wird!

Direkter Ansatz zur Berechnung der erzeugenden Funktion mittels Matrix-Inversion:

```
> Id := array(sparse, identity, 1..6, 1..6);
```

```
Id := array(sparse, identity, 1 .. 6, 1 .. 6, [])
```

```
> evalm(Id-z*A);
```

$$\begin{bmatrix} 1-z & 0 & 0 & -z & -z & 0 \\ -z & 1-z & 0 & -z & -z & -z \\ 0 & -z & 1-z & 0 & 0 & -z \\ -z & -z & 0 & 1-z & -z & -z \\ 0 & -z & -z & 0 & 1 & -z \\ 0 & -z & -z & 0 & 0 & 1-z \end{bmatrix}$$

```
> M := inverse(%);
```

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{2z^2 - 4z + 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z^2(z-2)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z(z^2 - 3z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z(z^2 - 3z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \\ \frac{z^2(z-2)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{4z^2 - 4z + 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z^2(z-2)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \\ -\frac{z(z^2 - z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{2z^2 - 4z + 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \\ \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z(z^2 - z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z^2(z-2)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z^3 - 3z^2 + 4z - 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z(2z-1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \end{bmatrix}$$

$$\left[-\frac{z(z^2 - z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \right],$$

$$\left[-\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z(2z - 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z(z^2 - 3z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z^3 - 6z^2 + 5z - 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \right.$$

$$\left. \frac{z(2z - 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \right],$$

$$\left[-\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \frac{z(2z - 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z(z^2 - 3z + 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, -\frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}, \right.$$

$$\left. \frac{z^3 - 3z^2 + 4z - 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} \right]$$

Das sieht schlimmer aus, als es ist! Man muss nun noch berücksichtigen, dass C und Cf Anfangszustände, sowie C und pC Endzustände sind.

> M[2,2]+M[2,4]+M[6,2]+M[6,4];

$$-\frac{4z^2 - 4z + 1}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} + \frac{2z(2z - 1)}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1} - \frac{z^2}{z^3 - 5z^2 + 5z - 1}$$

> V(z) := normal(%);

$$V(z) := -\frac{z - 1}{z^2 - 4z + 1}$$

Voila! Das erwartete Ergebnis! Zur Kontrolle:

> taylor(V(z), z, 10);

$$1 + 3z + 11z^2 + 41z^3 + 153z^4 + 571z^5 + 2131z^6 + 7953z^7 + 29681z^8 + 110771z^9 + O(z^{10})$$

Noch ein Blick auf die Nullstellen:

> solve(denom(V(z)), z);

$$2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$$

Daraus erhält man die Potenzsummandarstellung.

Man kann das aber auch direkt angehen

> rsolve({a(n+2)=4*a(n+1)-a(n), a(0)=1, a(1)=3}, a(n));

$$\left(-\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)(2 - \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)(2 + \sqrt{3})^n$$

Vorsicht: in dieser Rekursion zählt $a(n)$ die Anzahl der Verbindungsstrukturen mit $2(n+1)$ Knoten.