

► Binärbäume

► Definition

$$\mathcal{B} = \{\square\} + (\circ \times \mathcal{B} \times \mathcal{B})$$

► Klassifikation nach Grösse (Knotenzahl)

$$\mathcal{B}_n = \text{Binärbäume mit } n \text{ inneren Knoten, } c_n = \#\mathcal{B}_n$$

► Strukturelle Rekursion

$$\mathcal{B}_{n+1} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq n} \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_{n-k}$$

► Rekursion der Anzahlen (SEGNERS)

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k}$$

► Geordnete Bäume

► Definition

$$\mathcal{T} = \{\bullet\} \times \mathcal{T}^* = \bigsqcup_{k \geq 0} \{\bullet\} \times \mathcal{T}^k = \{\langle \bullet, t_1, t_2, \dots, t_k \rangle; k \geq 0, t_i \in \mathcal{T}\}$$

► Klassifikation nach Grösse (Knotenzahl):

$$\mathcal{T}_n = \text{geordnete Bäume mit } n + 1 \text{ Knoten}$$

► Klammersprache (DYCK)

► Definition

$$\mathcal{D} \subseteq \{a, b\}^* \text{ erzeugt durch cfg } D \rightarrow \lambda \mid a \cdot D \cdot b \cdot D$$

► Klassifikation nach Wortlänge

$$\mathcal{D}_n = \{w \in \mathcal{D}; |w| = |w|_a + |w|_b = 2n\}$$

► Charakterisierung

$$\forall w \in \{a, b\}^* : w \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} |w|_a = |w|_b \\ w = u \cdot v \Rightarrow |u|_a \geq |u|_v \end{cases}$$

► Eindeutigkeit der Zerlegung

$$\mathcal{D} \setminus \{\lambda\} \ni w = a \cdot u \cdot b \cdot v \text{ mit } u, v \in \mathcal{D}$$

► Primitive Klammersprache

► Definition

$$\mathcal{P} = a \cdot \mathcal{D} \cdot b \subset \mathcal{D}$$

► Charakterisierung

$$\forall w \in \{a, b\}^* : w \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} |w|_a = |w|_b > 0 \\ w = u \cdot v, v \neq \lambda \Rightarrow |u|_a > |u|_v \end{cases}$$

► Generierung der DYCK-Sprache  $\mathcal{D}$  aus  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}^* = \bigsqcup_{k \geq 0} \mathcal{P}^k \text{ (eindeutig)}$$

► Alternative Grammatik für  $\mathcal{D}$

$$D \rightarrow \lambda \mid P \cdot D$$

$$P \rightarrow a \cdot D \cdot b$$

- ▶ Bijektive Abbildung  $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  mit  $\Phi(\mathcal{D}_n) = \mathcal{B}_n$  ( $n \geq 0$ )

$$\Phi(\lambda) = \square$$

$$\Phi(a \cdot u \cdot b \cdot v) = \langle \circlearrowleft, \Phi(u), \Phi(w) \rangle$$

(mit  $u, v \in \mathcal{D}$  eindeutig)

- ▶ Bijektive Abbildung  $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$  mit  $\Psi(\mathcal{D}_n) = \mathcal{T}_n$  ( $n \geq 0$ )

$$\Psi(\lambda) = \langle \bullet \rangle$$

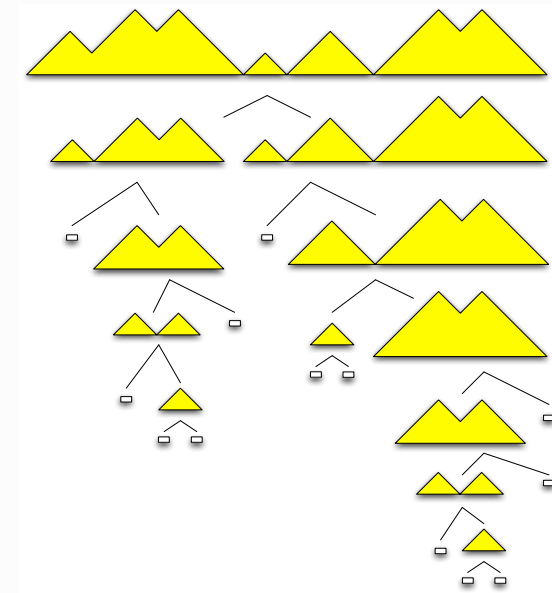
$$\Phi(\underbrace{au_1b}_{w_1} \cdot \underbrace{au_2b}_{w_2} \cdots \underbrace{au_kb}_{w_k}) = \langle \bullet, \Psi(u_1), \Psi(u_2), \dots, \Psi(u_k) \rangle$$

(mit  $w_1, w_2, \dots, w_k \in \mathcal{P}$  eindeutig)

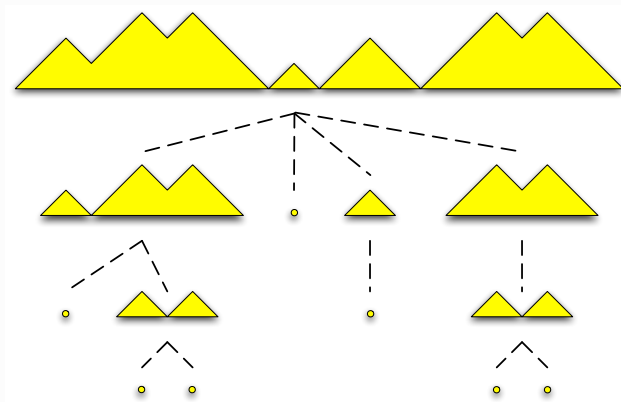
- ▶ Folgerung:

$$\#\mathcal{D}_n = \#\mathcal{T}_n = \#\mathcal{B}_n = c_n \quad (n \geq 0)$$

### Illustration der Abbildung $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$



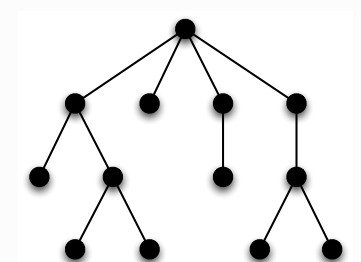
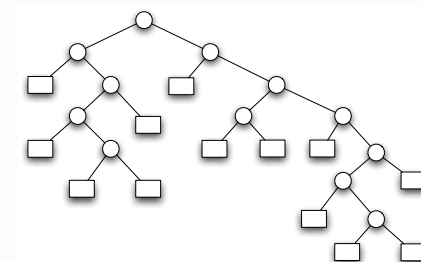
### Illustration der Abbildung $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$



Beispiel: die zu dem Wort

$$w = aabaababbbababbaabbaaababbb \in \mathcal{D}_{12}$$

gehörenden Bäume  $\Phi(w) \in \mathcal{B}_{12}$  und  $\Psi(w) \in \mathcal{T}_{12}$ :



Beweis der CATALAN-Formel

- Beweisen wird die Rekursionsformel

$$(n + 1) \cdot c_n = (4n - 2) \cdot c_{n-1} \quad (n \geq 0)$$

Daraus folgt per Induktion

$$c_n = \frac{4n - 2}{n + 1} c_{n-1} = \frac{4n - 2}{n + 1} \frac{1}{n} \binom{2n - 2}{n - 1} = \dots = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}$$

- Beweis der Rekursionsformel durch Konstruktion einer Bijektion zwischen

$$X_n = \{(t, a); t \in \mathcal{B}_n, a \in E(t)\}$$

mit  $\#X_n = (n + 1) \cdot c_n$  und

$$Y_n = \{(t, b, r); t \in \mathcal{B}_{n-1}, b \in E(t) \cup I(t), r \in \{L, R\}\}$$

mit  $\#Y_n = 2(2n - 1) \cdot c_{n-1}$

► Die Bijektion:

- sei  $t \in \mathcal{B}_n$  und  $a \in E(t)$
- sei  $c \in I(t)$  der Vorgängerknoten von  $a$  in  $t$ ,  $b$  der Bruderknoten von  $a$  in  $t$ ,  $t_b$  der Teilbaum von  $t$  mit Wurzel  $b$
- entferne  $a$  aus  $t$  und ersetze  $c$  durch  $t_b$ : dies liefert  $t' \in \mathcal{B}_{n-1}$  und  $b \in I(t) \cup E(t)$
- Bild von  $(t, a)$  unter dieser Abbildung ist  $(t', b, r)$  mit  $r = L$  bzw.  $r = R$ , je nachdem, ob  $a$  linker oder rechter Nachfolger von  $c$  war
- diese Konstruktion ist eindeutig umkehrbar

Illustration der Bijektion

