

Fibonacci-Zahlen als Beispiel

Für $\mathbf{f} = (f_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ gilt

- ▶ Rekursion

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 0), f_0 = 0, f_1 = 1$$

- ▶ erzeugende Funktion

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

- ▶ Partialbruchzerlegung mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathbf{f}(z) = \frac{z}{(1 - \phi \cdot z)(1 - \hat{\phi} \cdot z)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi \cdot z} - \frac{1}{1 - \hat{\phi} \cdot z} \right)$$

- ▶ Explizite Form

$$f_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$



Definition

- ▶ Eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$
 - ▶ genügt einer (homogenen) linearen Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten,
 - ▶ alias: genügt einer linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten,
 - ▶ alias: heisst *C-rekursiv*,

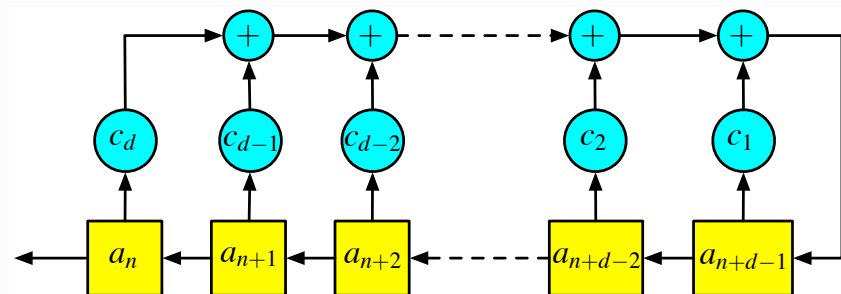
wenn es $d \geq 1$ Konstanten $q_1, q_2, \dots, q_d \in \mathbb{C}$ (wobei o.B.d.A. $q_d \neq 0$) gibt mit:

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot a_n \quad (n \geq 0)$$

- ▶ Eine "Lösung" $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ ist durch ihre (frei wählbaren) d Anfangswerte a_0, a_1, \dots, a_{d-1} eindeutig bestimmt.
- ▶ Der "Lösungsraum" ist ein linearer Raum der Dimension d



Matrix-Formulierung



$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+d-1} \\ a_{n+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ q_d & q_{d-1} & q_{d-2} & \dots & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+d-2} \\ a_{n+d-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ q_d & q_{d-1} & q_{d-2} & \dots & q_2 & q_1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d-2} \\ a_{d-1} \end{pmatrix}$$



Warum? Wozu?

- ▶ C-rekursive Folgen begegnen einem in vielen Situationen
 - ▶ Lineare Systemtheorie
 - ▶ Sehr enger Zusammenhang mit der Theorie der regulären Sprachen (Theorem von SCHÜTZENBERGER)
 - ▶ Viele divide-and-conquer-Rekursionen lassen sich in C-rekursive Folgen transformieren und lösen.
 - ▶ Summationsprobleme führen auf spezielle lineare Differenzgleichungen.
- ▶ Probleme des asymptotischen Verhaltens von Lösungen $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ lassen sich "im Prinzip" exakt behandeln
- ▶ Die Theorie und die Verfahren sind ganz analog zur Theorie der linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten.
An die Stelle der LAPLACE-Transformation tritt die sog. z-Transformation.

- ▶ Die Folgenglieder a_n lassen sich in Form einer "Exponentialsumme" schreiben, d.h. es gibt $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in \mathbb{C}$ und Polynome $R_1(X), \dots, R_s(X)$, so dass

$$a_n = R_1(n) \cdot \gamma_1^n + \dots + R_s(n) \cdot \gamma_s^n \quad (n \geq 0).$$

- ▶ Es gibt ein $d \geq 1$, so dass alle Determinanten der $(d+1) \times (d+1)$ -Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+d} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \dots & a_{n+d+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} & \dots & a_{n+d+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+d} & a_{n+d+1} & a_{n+d+2} & \dots & a_{n+2d} \end{bmatrix} \quad (n \geq 0).$$

verschwinden

Fundamentalsatz

Für eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- ▶ \mathbf{a} ist C-rekursiv, d.h. \mathbf{a} genügt einer linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten, d.h. es gibt ein $d \geq 1$ Konstanten $q_1, q_2, \dots, q_d \in \mathbb{C}$ mit

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot a_n \quad (n \geq 0)$$

- ▶ Die Reihe $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ist Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) einer echten rationalen Funktion, d.h. es gibt Polynome $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $Q(0) \neq 0$ und $\deg P(X) < \deg Q(X)$, so dass

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Genauere Formulierung

Es seien

- ▶ $q_1, q_2, \dots, q_d \in \mathbb{C}$ mit $q_d \neq 0$,
- ▶ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s \in \mathbb{C}$ (verschieden)
- ▶ $d_1, d_2, \dots, d_s \in \mathbb{N}$ mit $\sum_i d_i = d$

und

$$Q(X) = 1 - q_1 X - q_2 X^2 - \dots - q_d X^d = \prod_{1 \leq i \leq s} (1 - \gamma_i \cdot X)^{d_i}$$

d.h. jedes γ_i ist Nullstelle mit Vielfachheit d_i des sog. "reziproken Polynoms" ("charakteristisches Polynom")

$$Q^R(X) = X^d \cdot Q(1/X) = X^d - q_1 X^{d-1} - q_2 X^{d-2} - \dots - q_d$$

Für eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ sind folgende Aussagen äquivalent

- ▶ (C-rekursiv)

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot a_n \quad (n \geq 0)$$

- ▶ (rationale Funktion)

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\prod_{1 \leq i \leq s} (1 - \gamma_i \cdot z)^{d_i}} \quad \text{mit } \deg P(X) < d$$

- ▶ (Partialbruchzerlegung)

$$a(z) = \sum_{1 \leq i \leq s} \frac{P_i(z)}{(1 - \gamma_i \cdot z)^{d_i}} \quad \text{mit } \deg P_i(X) < d_i \quad (1 \leq i \leq s)$$



Zum Beweis

- ▶ (C-rekursiv) \Leftrightarrow (rationale Funktion)

folgt aus Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} a(z) \cdot Q(z) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(1 - q_1 z - q_2 z^2 - \dots - q_d z^d) \\ &= p_0 + p_1 z + \dots + p_{d-1} z^{d-1} = P(z) \end{aligned}$$

Das besagt

$$a_k - (q_1 \cdot a_{k-1} + q_2 \cdot a_{k-2} + \dots + q_k) = p_k \quad (0 \leq k < d) \quad (1)$$

und

$$a_{n+d} - (q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot a_n) = 0 \quad (n \geq 0)$$

Die $(a_k)_{0 \leq k < d}$ und die $(p_k)_{0 \leq k < d}$ bestimmen einander eindeutig durch die d Gleichungen (1).



- ▶ Darstellung als Exponentialsumme

$$a_n = \sum_{1 \leq i \leq s} R_i(n) \cdot \gamma_i^n \quad (n \geq 0) \quad \text{mit } \deg R_i(X) < d_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

- ▶ Algebraisch formuliert:
 \mathbf{a} ist \mathbb{C} -Linearkombination der d Basisfolgen

$$\left(n^\ell \cdot \gamma_i^n \right)_{n \geq 0} \quad (1 \leq i \leq s, 0 \leq \ell < d_i)$$

oder

$$\left(\binom{n}{\ell} \cdot \gamma_i^n \right)_{n \geq 0} \quad (1 \leq i \leq s, 0 \leq \ell < d_i)$$



Zum Beweis

- ▶ (rationale Funktion) \Leftrightarrow (Partialbruchzerlegung)
ist eine fundamentale Eigenschaft von Polynomen und rationalen Funktionen über einem Körper (hier \mathbb{C})
(NB: bei praktischen Berechnungen spielt Euklids Algorithmus eine Rolle!)
- ▶ (Partialbruchzerlegung) \Leftrightarrow (Exponentialsumme)
ist eine Anwendung von Newtons Binomialformel.
- ▶ (Exponentialsumme) \Leftrightarrow (algebraische Formulierung)
Vektorraum-Basis-Eigenschaft!



Erweiterung des Fundamentalsatzes

Die fundamentale Aussage lässt sich erweitern auf den Fall allgemeiner rationaler Funktionen

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit $P(0) \neq 0$, also ohne die Beschränkung $\deg P(X) < \deg Q(X)$. In dieser Situation macht man Polynomdivision

$$P(X) = L(X) \cdot Q(X) + R(X) \quad \text{mit } \deg R(X) < \deg Q(X)$$

und wendet die Aussage des Fundamentalsatzes auf $R(X)/Q(X)$ an.



Wichtige Beispielklasse

- ▶ Theorem von SCHÜTZENBERGER:
 $L \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprache,
 $L_n = L \cap \Sigma^n$ Menge der Wörter der Länge n aus L ,
 $\ell_n = \#L_n$ Anzahl der Wörter der Länge n
 $\Rightarrow (\ell_n)_{n \geq 0}$ ist eine C-rekursive Folge.
- ▶ Man benötigt die erweiterte Form des Fundamentalsatzes

$$\sum_{n \geq 0} \ell_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit $Q(0) \neq 0$, ohne Bedingung an die Grade der Polynome $P(X)$ und $Q(X)$.



Das bedeutet i.w.

- ▶ Die Rekursion

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot a_n$$

gilt für $n > \deg L(X) = \deg P(X) - \deg Q(X)$

- ▶ Die Darstellung als Exponentialsumme

$$a_n = R_1(n) \cdot \gamma_1^n + \dots + R_s(n) \cdot \gamma_s^n$$

gilt für $n > \deg L(X) = \deg P(X) - \deg Q(X)$.

Für das asymptotische Verhalten von $(a_n)_{n \geq 0}$ ist das also ohne Belang!



Alternativer Beweis

- ▶ $L \subseteq \Sigma^*$ sei reguläre Sprache, $\ell_n = \#L \cap \Sigma^n$
- ▶ $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ sei DFA, der L akzeptiert, $L(\mathcal{A}) = L$
- ▶ Konvention: $Q = \{1, 2, \dots, m\}$, $q_0 = 1$
- ▶ $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq m}$ Transfer-Matrix von \mathcal{A} :

$$a_{i,j} = \#\{x \in \Sigma; \delta(i, x) = j\}$$

- ▶ Potenzen der Transfer-Matrix

$$A^n = [a_{i,j}^{(n)}]_{1 \leq i,j \leq m} \quad \text{mit } a_{i,j}^{(n)} = \#\{w \in \Sigma^n; \delta^*(i, w) = j\}$$

- ▶ Startvektor s und Zielvektor t

$$s = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad t = (t_1, \dots, t_m) \quad \text{mit } t_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



- ▶ In dieser Formulierung gilt

$$\ell_n = \#L \cap \Sigma^n = \mathbf{s} \cdot A^n \cdot \mathbf{t}^T \quad (n \geq 0), \text{ also}$$

$$\sum_{n \geq 0} \ell_n z^n = \sum_{n \geq 0} (\mathbf{s} \cdot A^n \cdot \mathbf{t}^T) z^n = \mathbf{s} \cdot \sum_{n \geq 0} A^n z^n \cdot \mathbf{t}^T = \mathbf{s} \cdot (E_m - zA)^{-1} \cdot \mathbf{t}^T$$

- ▶ Der letzte Ausdruck stellt tatsächlich eine rationale Funktion dar (CRAMERSche Regel!!)
- ▶ Alternativ: verwende das Theorem von CAYLEY-HAMILTON
 - ▶ Für das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_m - A) = \lambda^m + c_1 \lambda^{m-1} + \dots + c_m \lambda^0$$

einer Matrix A gilt: $\chi(A) = \mathbf{0}$ (Nullmatrix)

- ▶ *Minimalpolynom* von A : normiertes Polynom $P(X)$ von minimalem Grad mit $P(A) = \mathbf{0}$ (eindeutig bestimmt!)
- ▶ Jedes Polynom $P(X)$ mit $P(A) = \mathbf{0}$ ist Vielfaches des Minimalpolynoms

- ▶ Sei nun $P(X) = X^d - p_1 \cdot X^{d-1} - p_2 \cdot X^{d-2} - \dots - p_d$ ein Polynom mit

$$P(A) = A^d - p_1 \cdot A^{d-1} - p_2 \cdot A^{d-2} - \dots - p_d \cdot E_m = \mathbf{0}$$

- ▶ Für alle $n \geq 0$ gilt dann auch $A^n \cdot P(A) = \mathbf{0}$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{0} \cdot \mathbf{t}^T = \mathbf{s} \cdot A^n \cdot P(A) \cdot \mathbf{t}^T \\ &= \mathbf{s} \cdot \left(A^{n+d} - p_1 \cdot A^{n+d-1} - \dots - p_d \cdot A^n \right) \cdot \mathbf{t}^T \\ &= \mathbf{s} \cdot A^{n+d} \cdot \mathbf{t}^T - p_1 \cdot \mathbf{s} \cdot A^{n+d-1} \cdot \mathbf{t}^T - \dots - p_d \cdot \mathbf{s} \cdot A^n \cdot \mathbf{t}^T \\ &= \ell_{n+d} - p_1 \cdot \ell_{n+d-1} - p_2 \cdot \ell_{n+d-2} - \dots - p_d \cdot \ell_n \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

- ▶ Beispiel: $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ Wörter, die keinen Faktor aa enthalten
 - ▶ erzeugende Funktion

$$L(z) = \sum_{n \geq 0} \ell_n z^n = \frac{1+z}{1-2z-2z^2}$$

- ▶ Rekursion

$$\ell_{n+2} = 2\ell_{n+1} + 2\ell_n \quad (n \geq 0), \ell_0 = 1, \ell_1 = 3$$

- ▶ Faktorisierung des Nennerpolynoms $Q(z)$

$$Q(z) = 1 - 2z - 2z^2 = (1 - \alpha \cdot z)(1 - \hat{\alpha} \cdot z)$$

mit $\alpha = 1 + \sqrt{3} = 2.732\dots, \hat{\alpha} = 1 - \sqrt{3} = -0.732\dots$

- ▶ (Fortsetzung des Beispiels)

- ▶ Partialbruchzerlegung

$$\frac{1+z}{1-2z-2z^2} = \frac{1}{\alpha - \hat{\alpha}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha \cdot z} - \frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha} \cdot z} \right)$$

- ▶ Anzahlen exakt

$$\ell_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1 - \sqrt{3})^n$$

- ▶ Anzahl asymptotisch

$$\ell_n \sim 1.07735\dots \cdot (2.732\dots)^n$$

- ▶ Coderate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3 \ell_n}{n} = \log_3 2.732\dots = 0.9248\dots$$

- ▶ Beispiel: $\bar{L} \subseteq \{a, b, c\}^*$ Wörter, die den Faktor aa enthalten
 - ▶ erzeugende Funktion

$$\bar{L}(z) = \sum_{n \geq 0} \bar{\ell}_n z^n = \frac{1}{1-3z} - L(z) = \frac{z^2}{1-5z+4z^2+6z^3}$$

- ▶ Rekursion

$$\bar{\ell}_{n+3} = 5\bar{\ell}_{n+2} - 4\bar{\ell}_{n+1} + 6\bar{\ell}_n \quad (n \geq 0), \bar{\ell}_0 = \bar{\ell}_1 = 0, \bar{\ell}_2 = 1$$

- ▶ Nennerpolynom

$$1 - 5z + 4z^2 + 6z^3 = (1 - 3 \cdot z)(1 - \alpha \cdot z)(1 - \hat{\alpha} \cdot z)$$

Beispiel zum Transfermatrix-Ansatz

- ▶ $\sigma = \{a, b, c\}$, $L \subseteq \Sigma^*$: alle Wörter, die weder aa noch bc als Faktoren enthalten
- ▶ $\ell_n = \#L \cap \Sigma^n$, $(\ell_n)_{n \geq 0} = (1, 3, 7, 16, 36, 81, \dots)$
- ▶ Transfermatrix für L

$$A = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- ▶ Potenzen der Transfer-Matrix

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

- ▶ (Fortsetzung des Beispiels)

- ▶ Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^2}{1-5z+4z^2+6z^3} = \frac{1}{1-3z} + \frac{1}{\alpha-\hat{\alpha}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha \cdot z} - \frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha} \cdot z} \right)$$

- ▶ Anzahl exakt

$$\bar{\ell}_n = 3^n - \ell_n = 3^n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n$$

- ▶ Anzahl asymptotisch

$$\bar{\ell}_n \sim 3^n$$

- ▶ Coderate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3 \bar{\ell}_n}{n} = 1$$

Fortsetzung des Beispiels

- ▶ charakteristisches Polynom (auch Minimalpolynom)

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1$$

- ▶ Rekursion

$$\ell_{n+3} = 2 \cdot \ell_{n+2} + \ell_{n+1} - \ell_n \quad (n \geq 0)$$

- ▶ erzeugende Funktion

$$L(z) = \sum_{n \geq 0} \ell_n z^n = \frac{1+z}{1-2z-z^2+z^3}$$

- ▶ Exponentialsumme

$$\ell_n = -0.038..(-.801..)^n - 0.375..(0.554..)^n + 1.414..(2.246..)^n \sim 1.414..(2.246..)^n$$

Siehe Maple-worksheet für Details.

Fortsetzung von gambler's ruin

- Falls $p = \frac{1}{2}$, so ist $\lambda = 1$ doppelte Nullstelle, Lösung hat also die Form

$$r_n = (a + b \cdot n) \cdot \lambda^n = a + b \cdot n$$

Einsetzen der Randwerte $r_0 = 1$ und $r_N = 0$ und Auflösung für a, b liefert

$$r_n = 1 - \frac{n}{N}$$

- Zahlenwerte

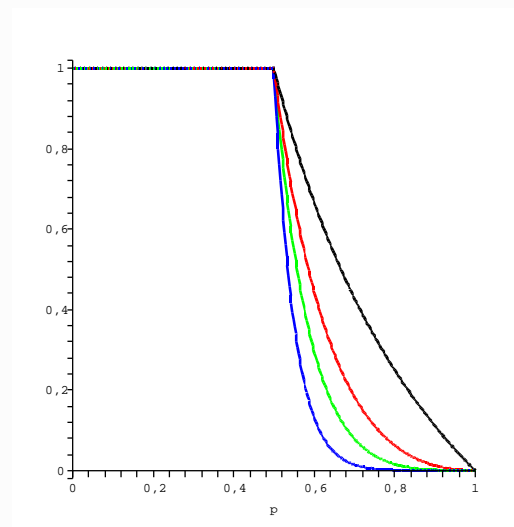
$$p = 0.3 \quad N = 10 \quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad r_4 = 0.994$$

$$p = 0.5 \quad N = 100 \quad n = 20 \quad \Rightarrow \quad r_{20} = 0.8$$

- beachte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq p \leq 1/2 \\ \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{falls } 1/2 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Verhalten der Ruin-Wahrscheinlichkeiten r_n für grosses N und $n = 1, 2, 3, 5$ in Abhängigkeit von p



Inhomogene (forcierte) lineare Rekursion

Situation: Rekursion wird durch eine "forcierende Folge"

$\mathbf{f} = (f_n)_{n \geq 0}$ beeinflusst:

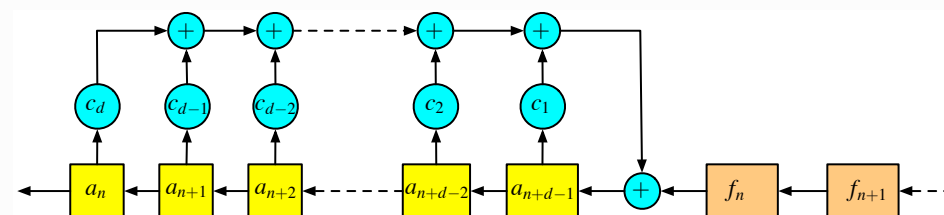
$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot a_n + f_n \quad (n \geq 0)$$

Lösung wiederum durch Anfangswerte a_0, a_1, \dots, a_{d-1} bestimmt.

Formulierung mit Potenzreihen:

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot Q(z) = P(z) + z^d \cdot \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

mit $Q(X) = 1 - q_1 X - q_2 X^2 - \dots - q_d X^d$ und $P(X)$ Polynom mit $\deg P < d$.



Äquivalente Form:

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} + z^d \cdot \frac{\sum_{n \geq 0} f_n z^n}{Q(z)}$$

Lösungsmenge für inhomogene Gleichungen regelt sich nach den Prinzipien der linearen Algebra:

- ▶ allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung =
 - ▶ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\frac{P(z)}{Q(z)}$
 - ▶ + spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $z^d \cdot \frac{\sum_{n \geq 0} f_n z^n}{Q(z)}$

Falls die forcierte Folge $\mathbf{f} = (f_n)_{n \geq 0}$ selbst eine C-rekursive Folge ist, kann man die Lösungen im inhomogenen Fall prinzipiell genauso bestimmen, wie im homogenen (nicht-forcierten) Fall:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_n z^n = \frac{G(z)}{H(z)} &\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} + z^d \cdot \frac{G(z)}{Q(z) \cdot H(z)} \\ &= \frac{P(z) \cdot H(z) + z^d \cdot G(z)}{Q(z) \cdot H(z)} \end{aligned}$$



Beispiel: allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n + f_n \quad (n \geq 0)$$

in Anhängigkeit von Anfangswerten a_0, a_1 und \mathbf{f} :

- ▶ $Q(X) = 1 - 4X + 4X^2 = (1 - 2X)^2$, also $d = 2, s = 1, \lambda = 2$
- ▶ Lösung $\mathbf{a} = (a_n)$ der homogenen Gleichung: $(\mathbf{f} = \mathbf{0})$

$$a_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 2^n$$

Wegen

$$\begin{aligned} a_0 &= (r_0 + r_1 \cdot 0) \cdot 2^0 = r_0 \\ a_1 &= (r_0 + r_1 \cdot 1) \cdot 2^1 = 2(r_0 + r_1) \end{aligned}$$

schreibt sich die allgemeine homogene Lösung:

$$a_n = \left(a_0 + \left(\frac{a_1}{2} - a_0 \right) n \right) \cdot 2^n = \left((1 - n)a_0 + \frac{a_1}{2} n \right) \cdot 2^n$$



Lösungen der inhomogenen (forcierten) Rekursion (Beispiele):

- ▶ $\mathbf{f} = (1, 1, 1, 1, \dots) = (1^n)_{n \geq 0}$, also $\sum_{n \geq 0} f_n z^n = \frac{1}{1-z}$

$$z^d \cdot \frac{\sum_{n \geq 0} f_n z^n}{Q(z)} = \frac{z^2}{(1 - 2z)^2 \cdot (1 - z)}$$

- ▶ Lösungsansatz $a_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 2^n + s_0 \cdot 1^n$
- ▶ $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow r_0 = -1, r_1 = \frac{1}{2}, s_0 = 1$,
- ▶ inhomogene Lösung mit $a_0 = a_1 = 0$:

$$a_n = (-2 + n) \cdot 2^{n-1} + 1 \quad (n \geq 0)$$

- ▶ allgemeine inhomogene Lösung

$$a_n = \left((1 - n)a_0 + \frac{a_1}{2} n \right) \cdot 2^n + (-2 + n) \cdot 2^{n-1} + 1$$

- ▶ man erkennt: $a_n \in \Theta(n \cdot 2^n)$, ausser wenn $a_1 = 2a_0 - 1$.



Spezialfall

- ▶ $Q(X) = 1 - q_1X - \dots - q_dX^d$ mit $q_1, \dots, q_{d-1} \geq 0, q_d > 0$
- ▶ Es gibt genau ein $\xi \in \mathbb{R}_+$ mit $Q(\xi) = 0$
- ▶ Mit $\gamma_1 = \xi^{-1}$ gilt

$$Q(X) = (1 - \gamma_1 \cdot X) \cdot \prod_{2 \leq i \leq s} (1 - \gamma_i \cdot X)^{d_i}$$

und γ_1 ist dominierend: $|\gamma_i| < \gamma_1$ ($2 \leq i \leq s$)

- ▶ Für eine C-rekursive Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ mit erzeugender Funktion $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = P(z)/Q(z)$ gilt also:

$$a_n \sim c \cdot \gamma_1^n = c \cdot \xi^{-n}$$

Analyse von divide-and-conquer Rekursionen

- ▶ Ausgangspunkt (vgl. SCHÖNING, *Algorithmik*, Kap. 1.9)

$$T(N) = \sum_{i=1}^d q_i \cdot T(N/\beta^i) + \Theta(N^k \cdot \log^\delta N)$$

mit $q_1, q_2, \dots, q_d \geq 0, q_d > 0$ und $k, \delta, \beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$.

- ▶ Betrachte Rekursion entlang Potenzen von β , d.h. $N = \beta^n$ und $T(N) = t_n$:

$$t_n = \sum_{i=1}^d q_i \cdot t_{n-i} + \Theta((\beta^k)^n \cdot n^\delta)$$

- ▶ Betrachte dies als eine forcierte lineare Rekursion!

$$t_{n+d} = \sum_{i=1}^d q_i \cdot t_{n+d-i} + c \cdot ((\beta^k)^n \cdot n^\delta)$$

- ▶ Komplexitätsabschätzung für einen k -SAT-Algorithmus (MONIEN-SPECKENMEYER)

- ▶ $t_k(n)$: obere Schranke für Anzahl der Knoten im Rekursionsbaum für k -SAT-Algorithmus für Formeln mit n Variablen (siehe Einleitung zur Vorlesung)
- ▶ Rekursion

$$t_k(n) = t_k(n-1) + t_k(n-2) + \dots + t_k(n-k) \quad (n \geq k)$$

- ▶ Rekursionspolynom

$$Q_k(X) = 1 - X - X^2 - \dots - X^k = (1 - \alpha_k X) \cdot \tilde{Q}_k(X)$$

wobei $\alpha_k > 0$ mit $Q_k(\alpha_k^{-1}) = 0$ (dominierend)

- ▶ asymptotisches Verhalten

$$t_k(n) \sim \alpha_k^n$$

- ▶ Die forcierte Folge ("overhead") ist C-rekursiv:

$$\sum_{n \geq 0} (\beta^k)^n n^\delta z^n = \frac{R(z)}{(1 - \beta^k \cdot z)^{\delta+1}}$$

- ▶ Damit gilt

$$\sum_{n \geq 0} t_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)} + z^d \cdot \frac{R(z)}{(1 - \beta^k \cdot z)^{\delta+1} \cdot Q(z)}$$

- ▶ Für $Q(X) = 1 - q_1X - \dots - q_dX^d$ sei $\xi > 0$ mit $Q(\xi) = 0$. $\gamma = \xi^{-1}$ ist dominierend!
- ▶ Es kommt nun auf das Verhältnis von γ und β^k an!

- ▶ γ dominiert: $\gamma > \beta^k \Leftrightarrow Q(\beta^{-k}) < 0$

$$\sum_{n \geq 0} t_n z^n = \frac{c}{(1 - \gamma \cdot z)} + \frac{S(z)}{(1 - \beta^k \cdot z)^{\delta+1} \cdot \tilde{Q}(z)}$$

wobei $\tilde{Q}(X) = Q(X)/(1 - \gamma \cdot z)$ und $\deg S < d + \delta$, also

$$t_n \in \Theta(\gamma^n), \text{ d.h. } T(N) \in \Theta(N^{\log_\beta \gamma})$$

- ▶ β^k dominiert: $\gamma < \beta^k \Leftrightarrow Q(\beta^{-k}) > 0$

$$\sum_{n \geq 0} t_n z^n = \frac{U(z)}{(1 - \beta^k \cdot z)^{\delta+1}} + \frac{V(z)}{Q(z)}$$

wobei $\deg U \leq \delta$, also

$$t_n \in \Theta(n^\delta \cdot (\beta^k)^n) \text{ d.h. } T(N) \in \Theta(N^k \cdot \log_\beta^\delta N)$$

falls $\deg U = \delta$.

- ▶ $\beta^k = \gamma$ dominiert: $\gamma = \beta^k \Leftrightarrow Q(\beta^{-k}) = 0$

$$\sum_{n \geq 0} t_n z^n = \frac{K(z)}{(1 - \beta^k \cdot z)^{\delta+2}} + \frac{L(z)}{\tilde{Q}(z)}$$

wobei $\deg K \leq \delta + 1$, also

$$t_n \in \Theta(n^{\delta+1} \cdot (\beta^k)^n) \text{ d.h. } T(N) \in \Theta(N^k \cdot \log_\beta^{\delta+1} N)$$

falls $\deg R = \delta + 1$.

Zusammenfassung:
für die Lösung einer divide-and-conquer Rekursion

$$T(N) = \sum_{i=1}^d q_i \cdot T(N/\beta^i) + \Theta(N^k \cdot \log_\beta^\delta N)$$

mit $q_1, \dots, q_{d-1} \geq 0, q_d > 0$ und $\beta > 1$ gilt:

- ▶ $Q(\beta^{-k}) < 0 \Rightarrow T(N) \in \Theta(N^{\log_\beta \gamma})$
- ▶ $Q(\beta^{-k}) > 0 \Rightarrow T(N) \in \Theta(N^k \log_\beta^\delta N)$
- ▶ $Q(\beta^{-k}) = 0 \Rightarrow T(N) \in \Theta(N^k \cdot \log_\beta^{\delta+1} N)$

Dabei ist

- ▶ $Q(X) = 1 - q_1 X - q_2 X^2 - \dots - q_d X^d$
- ▶ $\gamma^{-1} \in \mathbb{R}_+$: positive reelle Nullstelle von $Q(X)$ (eindeutig!)