

## Lexicografische Ordnung und Grössenvergleich

### Notation

–  $\mathcal{B} = \{0, 1\}$  : "bits",  $\mathcal{B}^n$  : bitstrings der Länge  $n$ , induktiv definiert durch

$$\mathcal{B}^0 = \{\epsilon\}, \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}, \mathcal{B}^{n+1} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{B}^n \quad (n \geq 1)$$

– bitstrings endlicher Länge

$$\mathcal{B}^* = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathcal{B}^n, \quad \mathcal{B}^+ = \bigsqcup_{n > 0} \mathcal{B}^n$$

Längenfunktion  $\mathcal{B}^* \rightarrow \mathbb{N} : |a| = n \Leftrightarrow a \in \mathcal{B}^n \quad (n \geq 0)$

– Konstruktoren head und tail

$h : \mathcal{B}^+ \rightarrow \mathcal{B}, \quad t : \mathcal{B}^+ \rightarrow \mathcal{B}^*$ , definiert durch:  $h(a) \cdot t(a) = a \quad (a \in \mathcal{B}^+)$

– Interpretation als Binärdarstellung natürlicher Zahlen

$val : \mathcal{B}^+ \rightarrow \mathbb{N} : a \mapsto \text{if } |a| = 1 \text{ then } a \text{ else } h(a) \cdot 2^{|\mathcal{B}^+(a)|} + val(t(a))$

1

• lexicografische Ordnung auf  $\mathcal{B}^n \quad (n > 0)$

$lex_n : \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n \rightarrow \{<_{lex}, =_{lex}, >_{lex}\} :$

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} \text{if } h(a) < h(b) \text{ then } <_{lex} \\ \text{elif } h(a) > h(b) \text{ then } >_{lex} \\ \text{else } \begin{cases} \text{if } n = 1 \text{ then } =_{lex} \\ \text{else } lex_{n-1}(t(a), t(b)) \end{cases} \end{cases}$$

• lexicografische Ordnung und "natürliche" Ordnung auf  $\mathbb{N}$ :

– die Abbildung  $val$  definiert eine Bijektion zwischen  $\mathcal{B}^n$  und  $[0 \dots 2^n - 1]$  mit

$$a <_{lex} b \Leftrightarrow val(a) < val(b)$$

(und entsprechend für  $=_{lex}$  und  $>_{lex}$ )

2

### Kosten des lexicografischen Grössenvergleichs $lex_n$

$V_n : \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n \rightarrow \mathbb{N} : (a, b) \mapsto$  Anzahl der Vergleichsoperationen  
auf bit-Ebene  
für die Berechnung von  $lex_n(a, b)$

• im *best case*

$$\min_{(a, b) \in \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n} V_n(a, b) = 1$$

• im *worst case*

$$\max_{(a, b) \in \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n} V_n(a, b) = n$$

• im *average case*

$$\overline{V}_n = \frac{1}{\#(\mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n)} \sum_{(a, b) \in \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n} V_n(a, b) = ?$$

3

### rekursives Verhalten:

$$V_1(a, b) = 1 \quad (a, b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$$

$$V_{n+1}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h(a) \neq h(b) \\ 1 + V_n(t(a), t(b)) & \text{falls } h(a) = h(b) \end{cases} \quad (a, b) \in \mathcal{B}^{n+1} \times \mathcal{B}^{n+1}$$

Folgerung: für  $\Sigma V_n = \sum_{(a, b) \in \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n} V_n(a, b)$  gilt

$$\begin{aligned} \Sigma V_{n+1} &= 2 \cdot \sum_{(a, b) \in \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n} 1 + 2 \cdot \sum_{(a, b) \in \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n} (1 + V_n(a, b)) \\ &= 2 \cdot (\#\mathcal{B}^n)^2 + 2 \cdot (\#\mathcal{B}^n)^2 + 2 \cdot \Sigma V_n \\ &= 4^{n+1} + 2 \cdot \Sigma V_n \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\overline{V}_{n+1} = \frac{\Sigma V_{n+1}}{4^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma V_n}{4^n} = 1 + \frac{1}{2} \overline{V}_n, \quad \overline{V}_1 = 1$$

und somit

$$\overline{V}_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{d.h. } \overline{V}_n \sim 2$$

4