

Notation für das asymptotische Verhalten von Funktionen

Vorbemerkungen:

1. Aussagen über die Komplexität von Algorithmen und von Problemen sollen (in der Regel) unabhängig von speziellen Maschinenmodellen und speziellen Eigenschaften eine Implementierung, ebenso von technologischen Details
2. Bei der Untersuchung von Komplexitätsfunktionen interessiert nicht so sehr der exakte Werteverlauf einer Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, sondern deren "Tendenz", d.h. das Wachstumsverhalten (*asymptotisches Verhalten*) für wachsendes Argument

Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938)

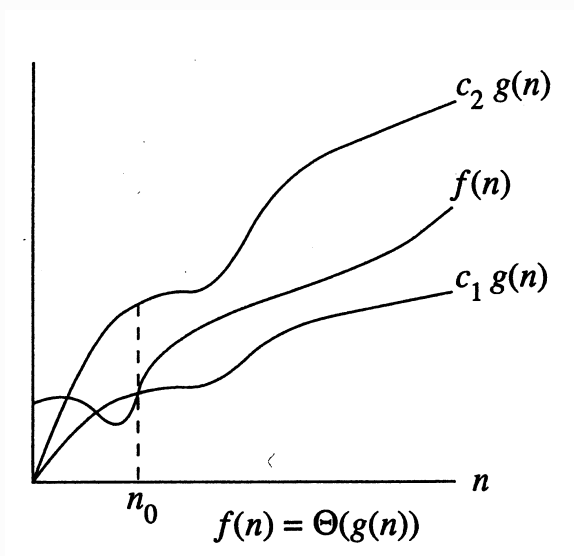
Professor der Mathematik in Göttingen (1909–1933)

Wichtige Arbeiten zu Zahlentheorie und Analysis ("Analytische Zahlentheorie")



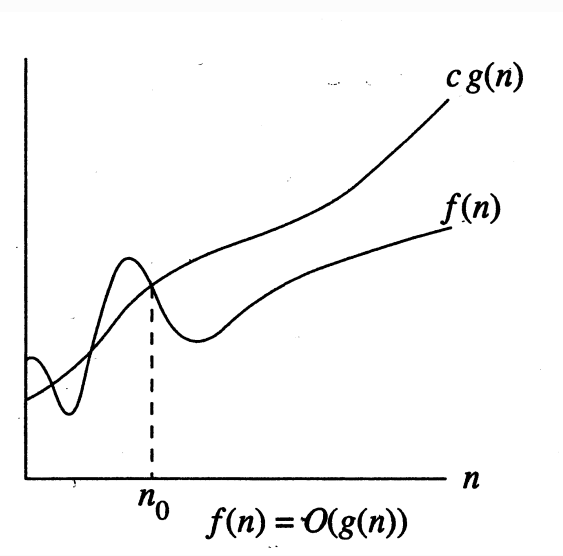
www.math.uni-goettingen.de/Personen/Bedeutende_Mathematiker/landau.html

1

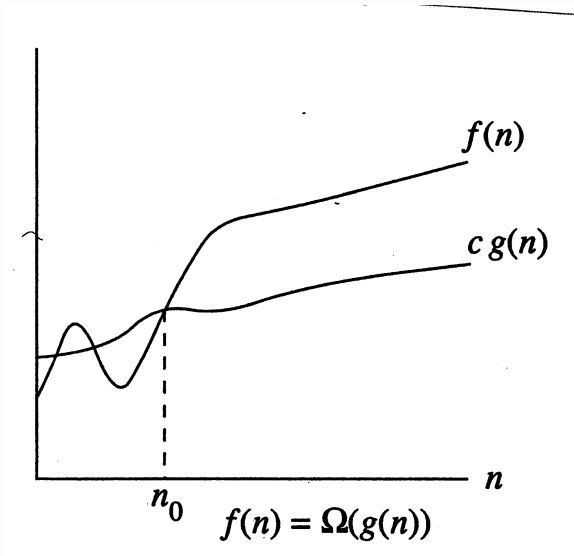


3

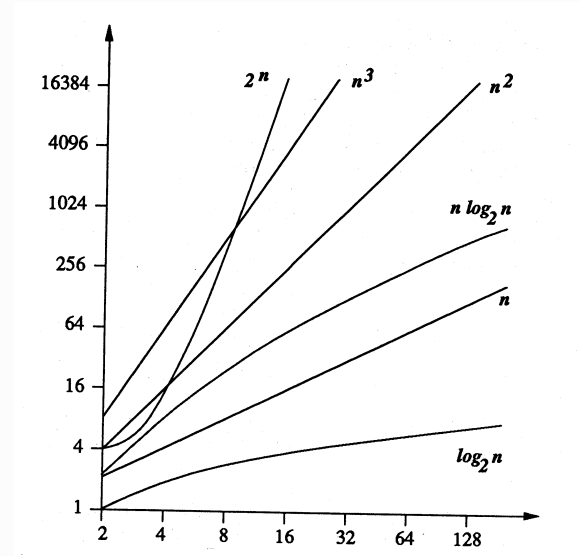
2



4



5



6

Landausche Symbole für asymptotisches Verhalten von Funktionen

$$O(f) = \{ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \exists c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : g(n) \leq c \cdot f(n) \}$$

$g(n) \in O(f(n))$: “ $f(n)$ ist asymptotische obere Schranke für $g(n)$ ”

$$\Omega(f) = \{ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \exists c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : g(n) \geq c \cdot f(n) \}$$

$$\Omega_\infty(f) = \{ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \exists c \in \mathbb{R}_{>0} \forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}_{> m} : g(n) \geq c \cdot f(n) \}$$

$g(n) \in \Omega(f(n))$: “ $f(n)$ ist asymptotische untere Schranke für $g(n)$ ”

$$\Theta(f) = \{ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; g \in O(f) \wedge g \in \Omega(f) \}$$

$g(n) \in \Theta(f(n))$: “ $f(n)$ hat gleiche Wachstumsordnung wie $g(n)$ ”

7

$$o(f) = \left\{ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \right\}$$

$g(n) \in o(f(n))$: “ $g(n)$ hat kleinere Wachstumsordnung als $f(n)$ ”

$$\omega(f) = \left\{ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \right\}$$

$g(n) \in \omega(f(n))$: “ $g(n)$ hat grössere Wachstumsordnung als $f(n)$ ”

$$f(n) \sim g(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

“ $f(n)$ und $g(n)$ sind asymptotisch äquivalent”

8

Für Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in O(g) \Leftrightarrow |f| \in O(|g|)$$

wobei $|f| : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto |f(x)|$

Ebenso für die anderen Landauschen Symbole.

9

8. $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$ und $f \in o(g) \Leftrightarrow g \in \omega(f)$
9. $f \in \Omega(g) \Rightarrow f \in \Omega_\infty(g)$
10. $f \in \Omega_\infty(g) \not\Rightarrow f \in \Omega(g)$
11. Transitivität: $f \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(h) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(h)$ für $\mathcal{O} \in \{O, \Omega, \Theta, o, \omega\}$
12. $f \in \Omega_\infty(g) \wedge g \in \Omega_\infty(h) \not\Rightarrow f \in O(h)$
13. $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g)$
14. falls g nur endlich-viele Nullstellen hat:

$$f \in O(g) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$$

15. falls g nur endlich-viele Nullstellen hat:

$$f \in \omega(g) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geq c$$

11

Rechenregeln

1. $\forall k, \ell \in \mathbb{N} : k > \ell \Rightarrow n^\ell \in o(n^k)$
2. $\forall k, \ell \in \mathbb{N} : k > \ell \Rightarrow n^k + n^\ell \in \Theta(n^k)$
3. für Polynome $p(n) = \sum_{i=0}^k p_i n^i$ mit $p_k > 0$, ℓ eine Konstante
 $\ell [\geq, \leq, =, >, <] k \Rightarrow p(n) \in [O, \Omega, \Theta, o, \omega] (n^\ell)$
4. $\forall k \in \mathbb{N} : n^k \in o(2^n)$
5. Logarithmen zu verschiedenen Basen
 $\log_a n \in \Theta(\log_b n) \quad (a, b > 1)$
6. $\forall k \in \mathbb{N} \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \log^k(n) \in o(n^\epsilon)$
7. $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \in o(2^{2^n})$

10

Das Wachstumsverhalten (asymptotisches Verhalten) einer Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bezeichnet man als

- a — *konstant*, falls $f(n) \in \Theta(1)$
- b — *logarithmisch*, falls $f(n) \in \Theta(\log(n))$
- c — *polylogarithmisch*, falls $f(n) \in O(\log^k(n))$ für ein $k \in \mathbb{N}$
- d — *linear*, falls $f(n) \in \Theta(n)$
- e — *quadratisch*, falls $f(n) \in \Theta(n^2)$
- f — *polynomiell*, falls $f(n) \in O(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$
- g — *superpolynomiell*, falls $f(n) \in \omega(n^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- h — *subexponentiell*, falls $f(n) \in o(2^{cn})$ für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$
- i — *exponentiell*, falls $f(n) \in O(2^{cn})$ für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$

12

Häufig in der Informatik:

Abschätzung des Wachstumsverhaltens von Funktionen $f(n)$, die gegeben sind durch

- Summen, wie z.B.

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k \quad \log n! = \sum_{i=1}^n \log i$$

harmonische Zahlen Potenzsummen Fakultäten

- Rekursionsgleichungen, wie z.B.

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{mergesort}$$

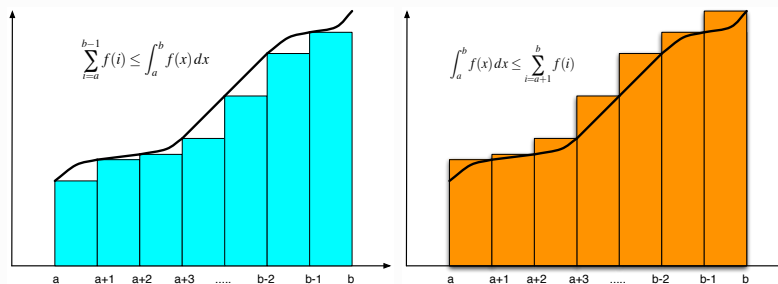
$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n) \quad \text{divide-and-conquer}$$

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(i-1) + T(n-i) \quad \text{quicksort}$$

Wichtiges Hilfsmittel zum Abschätzen von Summationen: Integration

Ist $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend, $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=a+1}^b f(i)$$



drei wichtige Beispiele

- harmonische Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$H_n \sim \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O(1/n^2)$$

wobei $\gamma = 0.57721 \dots$ (EULERSche Konstante), also $H_n \in \Theta(\log n)$

- Potenzsummen $S_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k$ für $k > -1$

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \leq S_k(n) \leq n^{k+1} \quad \text{also } S_k(n) \in \Theta(n^{k+1})$$

- Fakultäten: STIRLINGS Formel

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(1/n^3)\right)$$

also $\log n! \in \Theta(n \cdot \log n)$

Anwendung auf die drei wichtigen Beispiele

- harmonische Zahlen H_n
mit $f : [1, n+1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1/x$ ergibt sich

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

und somit $H_n \in \Theta(\log n)$

Die Zahlen c_n heissen CATALAN-Zahlen, zur Ehre von



Eugene Charles Catalan (1814-1894)
belgischer Mathematiker, Schüler von Liouville an der Ecole Polytechnique
wegen linksextremer politischer Aktivitäten keine akademische Karriere
Lehrer in Chalons-sur-Marne
Beiträge zur Zahlentheorie

der zeigte:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

Wie gross ist c_n ?

Einsetzen der STIRLING-Approximation von $n!$ ergibt

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{(n+1) \cdot \sqrt{\pi n}} \in \Theta\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$$