

traditionelle Multiplikation, rekursiv betrachtet

$$\begin{aligned}
 981 \times 1234 &= (9 \times 10^2 + 81) \times (12 \times 10^2 + 34) \\
 &= 9 \times 12 \times 10^4 \\
 &\quad + (9 \times 34 + 81 \times 12) \times 10^2 \\
 &\quad + 81 \times 34 \times 10^0 \\
 &= 108 \times 10^4 + 1278 \times 10^2 + 2754 \\
 &= 1080000 + 127800 + 2754 \\
 &= 1210554
 \end{aligned}$$

KARATSUBAS Multiplikationsidee (1962)

$$\begin{aligned}
 981 \times 1234 &= (9 \times 10^2 + 81) \times (12 \times 10^2 + 34) \\
 &= (9 \times 12) \times 10^4 \\
 &\quad + ((9 + 81) \times (12 + 34) - 9 \times 12 - 81 \times 34) \times 10^2 \\
 &\quad + (81 \times 34) \times 10^0 \\
 &= 9 \times 12 \times 10^4 \\
 &\quad + (90 \times 46 - 9 \times 12 - 81 \times 34) \times 10^2 \\
 &\quad + 81 \times 34 \times 10^0 \\
 &= 108 \times 10^4 + 1278 \times 10^2 + 2754 \\
 &= 1080000 + 127800 + 2754 \\
 &= 1210554
 \end{aligned}$$

Die "Schulmethode" der Multiplikation am Beispiel 981×1234

9×1234	1	1	1	0	6
8×1234		9	8	7	2
1×1234			1	2	3
981×1234	1	2	1	0	5
				5	4

Komplexität der Schulmethode

Die Multiplikation von zwei n -stelligen (dezimal oder binäre oder andere Basis) Zahlen erfordert $n \times n = n^2$ Multiplikationen von Ziffern (zuzüglich ca. n^2 Additionen von Ziffern)

Die sog. "Russische Bauermultiplikation"

981×1234	=	?
981	1234	1234
490	2468	2468
245	4936	4936
122	9872	9872
61	19744	19744
30	39488	39488
15	78976	78976
7	157952	157952
3	315904	315904
1	631808	631808
		1210554

Vergleich der Komplexität von verschiedenen Multiplikationsalgorithmen
 n = Anzahl der Ziffern

“Schulmethode” $c_1 \cdot n^2$
 KARATSUBA (1962) $c_2 \cdot n^{\log_2 3}$
 SCHÖNHAGE/STRASSEN (1971) $c_3 \cdot n \cdot \log n \cdot \log \log n$

n	n^2	$n^{\log_2 3}$	$n \log n \log \log n$
10^1	10^2	38.46×10^0	19.20×10^0
10^2	10^4	14.79×10^2	70.33×10^1
10^3	10^6	56.83×10^3	13.35×10^3
10^4	10^8	21.87×10^5	20.44×10^4
10^5	10^{10}	84.10×10^6	28.13×10^5
10^6	10^{12}	32.34×10^8	36.27×10^6
10^7	10^{14}	12.43×10^{10}	44.80×10^7
10^8	10^{16}	47.83×10^{11}	53.66×10^8
10^9	10^{18}	18.39×10^{13}	62.81×10^9
10^{10}	10^{20}	70.73×10^{14}	72.22×10^{10}

Schema für die Multiplikation von zwei $2n$ -stelligen Zahlen

$$(a \times 10^n + b) \times (c \times 10^n + d) =$$

$$\underline{a \times c} \times 10^{2n} + (\underline{a \times d} + \underline{b \times c}) \times 10^n + \underline{b \times d} =$$

$$\underline{a \times c} \times 10^{2n} + \left(\underline{(a+b) \times (c+d)} - a \times c - b \times d \right) \times 10^n + \underline{b \times d}$$

wobei a, b, c, d n -stellige Zahlen sind

Beobachtung:

zwei $2n$ -stellige Zahlen können multipliziert werden, indem man 3 (statt 4 (ii)) Multiplikationen von n -stelligen Zahlen ausführt

Folgerung (mittels Iteration dieses divide-and-conquer-Schemas):

zwei 2^n -stellige Zahlen können mittels
 3^n (statt 4^n (ii)) Multiplikationen von Ziffern miteinander multipliziert werden.

Die schnellste bislang bekannte Multiplikationemethode von

SCHÖNHAGE/STRASSEN (1971)

beruht auf der

“schnellen Fourier-Transformation” (FFT)

und benötigt eine Anzahl von Ziffernoperationen proportional zu

$$n \log n \log n$$

für die Multiplikation zweier n -stelligen Zahlen