1 Lösungstypen für die *divide-and-conquer*-Rekursion $t(n) = a \cdot t(n/b) + f(n)$

1.1 Vorbemerkung

Rekursiongleichungen dieses Typs werden in vielen Büchern über Komplexitätsanalyse behandelt. Besonders herauszuheben ist die sehr gründliche Abhandlung in den Abschnitten 4.3/4.4 von CORMEN/LEISERSON/RIVEST, wo dies als "Master Method" bezeichnet wird. Dort wird allerdings der explizite Bezug auf den Konvergenzradius von Potenzreihen vermieden.

1.2 Die anschauliche Bedeutung solcher Rekursionen

In vielen Fällen führt die Analyse von *divide-and-conquer*-Algorithmen auf Rekursionsgleichungen des folgenden Typs:

$$t(n) = a \cdot t(n/b) + f(n) \quad , \quad t(1) = f(1) > 0 \tag{1}$$

Hierbei soll b ganz und ≥ 2 sein, $a > 0$ und $f(n) \geq 0$.

Die anschauliche Bedeutung dieser Rekursion: $t(n)$ beschreibt die Kosten für die Ausführung eines Algorithmus bei Problemgröße n. Probleminstanzen dieser Größe werden bearbeitet, indem sie in a Teilprobleme (gleichen Typs) der Größe n/b zerlegt werden (und dies Vorgehen wird rekursiv weitergeführt, bis Probleme der Größe 1 erreicht werden).[1] Mit $f(n)$ wird der *overhead* beschrieben, der bei dieser Zerlegung in Teilprobleme und der Synthese des Ergebnisses aus den Lösungen für die Teilprobleme benötigt wird (vgl. etwa die Prozedur *merge* bei *mergesort*).

Das Ziel der Untersuchung von Rekursionen wie (1) wird es sein, Informationen über das Wachstumsverhalten der Lösung $t(n)$ in Abhängigkeit von a, b und der *overhead*-Funktion $f(n)$ zu erhalten. Die Erfahrung lehrt, daß man oft über das Verhalten von $f(n)$ nur ungenaue Kenntnis hat, daß aber auch bei expliziter Kenntnis von $f(n)$ eine explizite Lösung für $t(n)$ nicht möglich ist, aus der man deren Wachstumsverhalten direkt ablesen könnte. Daher muß es das Ziel sein, auch aus ungefährer Kenntnis der Funktion

[1] In der Praxis ist es oft so, daß man diese rekursive Bearbeitung nicht bis zur kleinstmöglichen Problemgröße treibt, sondern vorher schon auf (nicht-rekursive) Algorithmen umschaltet, die für kleine Problemgrößen besser sind als das rekursive Verfahren. Für die Resultate, die hier interessieren, hat das keine Bedeutung.

$f(n)$, also beispielsweise über deren Wachstumsverhalten im Sinne einer Θ-Aussage, entsprechende Aussagen über die Lösungsfunktion $t(n)$ zu gewinnen.

Es macht zunächst nur Sinn, diese Rekursion (1) für Argumente zu betrachten, die Potenzen von b sind — allerdings bleiben alle Aussagen richtig, wenn $n \mapsto t(n)$ *monoton steigend* ist. Man setzt also

$$t_m := t(b^m) \quad , \quad f_m := f(b^m) \quad , \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

und faßt diese Zahlen zusammen, indem man sie als Koeffizienten in Potenzreihen steckt :

$$\tau(z) := \sum_{m \geq 0} t_m \, z^m \quad , \quad \phi(z) := \sum_{m \geq 0} f_m \, z^m$$

1.3 Warum Potenzreihen?

Es ist eine fundamentale Einsicht der Analysis, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem Konvergenzradius K_g einer Potenzreihe $g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n \, z^n$ und dem Wachstumsverhalten der Koeffizientenfolge $(g_n)_{n \geq 0}$ besteht:

$$K_g^{-1} = \overline{\lim_{n \to \infty}} |g_n|^{1/n}$$

was man für unsere Zwecke besser so ausdrückt[2]:

> für alle $\epsilon > 0$ gilt
>
> $$\left(K_g^{-1} - \epsilon\right)^n <_{i.o.} |g_n| <_{a.e.} \left(K_g^{-1} + \epsilon\right)^n$$
>
> wobei die linke Ungleichung für unendlich viele n gilt (i.o. = *infinitely often*), während die rechte Ungleichung für fast alle n gilt (a.e. = *almost everywhere*).

Das heißt also: der reziproke Konvergenzradius K_g^{-1} beschreibt den *exponentiellen* Anteil am Wachstumsverhalten von $(g_n)_{n \geq 0}$. (N.B. Dies gilt auch, falls

[2] Die Bezeichnung $\overline{\lim}$ liest der Mathematiker als *limes superior* und schreibt dafür oft auch *lim sup*. Jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ von reellen Zahlen hat einen (eindeutig bestimmten) *limes superior*, der allerdings auch unendlich sein kann. In unserer Situation entspricht das einem Konvergenzradius $K = 0$.

$K_g = 0$ oder $K_g = \infty$ ist: dann wächst $(g_n)_{n\geq 0}$ stärker bzw. schwächer als jede Exponentialfunktion.) Noch anders ausgedrückt:

$$\forall n \ : \ |g_n| = K_g^{-n} \cdot \tilde{g}_n$$

wobei $n \mapsto \tilde{g}_n$ eine Folge ist, die den *subexponentiellen* Anteil am Wachstumsverhalten von $(g_n)_{n\geq 0}$ beschreibt:

$$\forall \epsilon > 0 \ : \ (1-\epsilon)^n <_{i.o.} |\tilde{g}_n| <_{a.e} (1+\epsilon)^n$$

(d.h. die Potenzreihe $\tilde{g}(z) = \sum_n \tilde{g}_n \, z^n$ hat Konvergenzradius $K_{\tilde{g}} = 1$).

Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Rekursionsbeziehung (1) äquivalent ist zu der funktionalen Beziehung

$$\tau(z) = \frac{1}{1-az} \cdot \phi(z) \tag{2}$$

und dies wiederum ist äquivalent zu der Summendarstellung

$$t_m = \sum_{i=0}^{m} f_i \, a^{m-i} \qquad (m \geq 0) \tag{3}$$

1.4 Fallunterscheidung und Lösungstypen

Die funktionale Darstellung (2) sagt uns sofort, daß drei verschiedene Situationen auftreten können — beachte dabei, daß $1/a$ der Konvergenzradius der geometrischen Reihe $1/(1-az) = \sum_{n\geq 0}(az)^n$ ist:

- $K_\phi > 1/a$, d.h. es wird $K_\tau = \min(K_\phi, 1/a) = 1/a$ sein und das exponentielle Wachstum von $(t_m)_{m\geq 0}$ wird durch a^m bestimmt. Heuristisch bedeutet dies, daß die overhead-Kosten, ausgedrückt durch die Funktion $\phi(z)$, am Wachstum der Gesamtkosten nur einen subexponentiellen Anteil haben, also für große Probleminstanzen zu vernachlässigen sind. Beachte: a^m gibt die Anzahl der schließlich zu bearbeitenden Elementarprobleme der Größe 1 an, und die Gesamtkosten verhalten sich im wesentlichen proportional zu dieser Zahl.

- $K_\phi = 1/a$, d.h. es wird auch hier $K_\tau = \min(K_\phi, 1/a) = 1/a$ sein, und das exponentielle Wachstum von $(t_m)_{m\geq 0}$ wird also durch a^m bestimmt — allerdings mit dem Unterschied, daß hier auch die overhead-Kosten zu den Gesamtkosten wesentlich beitragen.

- $K_\phi < 1/a$, d.h. es wird $K_\tau = \min(K_\phi, 1/a) = K_\phi$ sein und das exponentielle Wachstum von $(t_m)_{m\geq 0}$ wird durch K_ϕ^{-m} bestimmt. Hier gehen die Gesamtkosten fast ausschließlich zu Lasten des overheads.

Nach diesem qualitativen Überblick nun die genauere Diskussion der Lösungstypen:

1. Der Fall $K_\phi > 1/a$:
   Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn $f(n) \in \Theta(n^k)$ ist und $a > b^k$. In jedem Fall gilt:
   $$t_m = \sum_{i=0}^{m} f_i\, a^{m-i} = a^m \cdot \sum_{i=0}^{m} f_i \frac{1}{a^i}$$
   und es ist
   $$f_0 \leq \sum_{i=0}^{m} f_i \frac{1}{a^i} \leq \phi(\frac{1}{a}) \in \mathbf{R}$$
   da ja $\phi(z)$ für $z = 1/a$ konvergiert. Also gilt
   $$t_m \in \Theta(a^m)$$
   und, wenn man dies durch $n = b^m$ ausdrückt:
   $$t(n) = t(b^m) = t_m \in \Theta(a^m) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. Der Fall $K_\phi < 1/a$:
   Betrachten wir hier den "typischen" Fall, daß $f(n) \in \Theta(n^k)$ ist mit $a < b^k$. Aus einer Abschätzung $f(n) \leq c \cdot n^k$, d.h. $f_m \leq c \cdot b^{mk}$, wird mit Hilfe von (3):
   $$t_m \leq c \cdot b^{mk} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i$$
   und die rechts stehende geometrische Reihe konvergiert für $m \to \infty$. Daher also
   $$t_m \in O((b^m)^k) \;\;, \text{ also } \; t(n) \in O(n^k)$$
   Andererseits ist $t_m \geq f_m$, also insgesamt, wenn man es durch $n = b^m$ ausdrückt:
   $$t(n) \in \Theta(n^k)$$
   Ist f nicht von der angegebenen Form, so muss man eventuell genauer untersuchen, so wie das bei dem nächsten Fall geschieht:

3. Der Fall $K_\phi = 1/a$:
Dies ist der "kritische" Fall. Schreiben wir hier zunächst einmal

$$f_m = a^m \cdot \tilde{f}_m \quad , \quad \text{wobei} \quad \overline{\lim_{m\to\infty}} \tilde{f}_m^{1/m} = 1$$

d.h. $\tilde{f}_m$ beschreibt den subexponentiellen Anteil des Verhaltens von f_m. Dann ist also

$$t_m = \sum_{i=0}^{m} f_i \, a^{m-i} = a^m \sum_{i=0}^{m} \tilde{f}_i$$

und der subexponentielle Anteil des Verhaltens von t_m wird durch die rechts stehende Summe beschrieben. Betrachten wir den Fall, wo $b^k = a$ ist und

$$f(n) = c \cdot n^k \cdot (\log_b n)^q \quad \text{für } n > 1, q \text{ reell}$$

Dann ist also

$$f_m = c \cdot b^{mk} \cdot m^q \quad \text{d.h.} \quad \tilde{f}_m = c \cdot m^q \quad (m > 0)$$

Hier sind wiederum drei Fälle zu unterscheiden:

(a) Fall $q < -1$:
In diesem Fall konvergiert $\sum_{i=0}^{m} \tilde{f}_i = c\,(f(1) + \sum_{i=1}^{m} i^q)$ für $m \to \infty$ und daher

$$t(n) = t(b^m) \in \Theta(a^m) = \Theta(n^{\log_b a})$$

(b) Fall $q = -1$:
In diesem Fall hat man es mit $f(1) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i = f(1) + c\,H_m \approx c' \log m$ zu tun, und deshalb:

$$t(n) \in \Theta(a^m \log m) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log\log_b n\right)$$

(c) Fall $q > -1$:
In diesem Fall verhält sich $\sum_{i=0}^{m} \tilde{f}_m = f(1) + c \sum_{i=1}^{m} i^q$ wie ein $\Theta(m^{q+1})$ und daher

$$t(n) \in \Theta(a^m\, m^{q+1}) = \Theta\left(n^{\log_b a} \,(\log_b n)^{1+q}\right)$$

1.5 Beispiele

Hier nun einige Beispiele:

$$
\begin{aligned}
t(n) = t(n/2) + c &\Rightarrow t(n) \in \Theta(\log n) \\
t(n) = 2\,t(n/2) + c\,n &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n \log n) \\
t(n) = 2\,t(n/2) + c\,n^2 &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n^2) \\
t(n) = 4\,t(n/2) + c\,n^2 &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n^2 \log n) \\
t(n) = 7\,t(n/2) + c\,n^2 &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}) \\
t(n) = 2\,t(n/2) + \log n &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n) \\
t(n) = 3\,t(n/2) + n \log n &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n^{\log_2 3}) \\
t(n) = 2\,t(n/2) + n \log n &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n \log^2 n) \\
t(n) = 5\,t(n/2) + (n \log n)^2 &\Rightarrow t(n) \in \Theta(n^{\log_2 5})
\end{aligned}
$$

2 Einige weitere Beispiele und Bemerkungen zu Potenzreihen und dem Wachstumsverhalten der Koeffizienten

2.1 Beispiele

1. Geometrische Reihe:

$$g(z) = 1/(1 - a\,z) = \sum_{n \geq 0} (a\,z)^n \text{ mit } a > 0$$

Hier ist $K_g = 1/a$ und der subexponentielle Anteil $\tilde{g}_n$ an der Koeffizienten $g_n = a^n$ ist konstant $= 1$.

Betrachtet man beispielweise das Quadrat von $g(z)$:

$$g(z)^2 = \sum_{n \geq 0} g_n^{(2)}\, z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1)\, a^n z^n$$

so sieht man, daß auch $g(z)^2$ den Konvergenzradius $K_{g^2} = 1/a$ hat, denn $g_n^{(2)} = (n+1)\, a^n$ wächst exponentiell wie a^n. Der subexponentielle Anteil ist hier $\tilde{g}_n^{(2)} = 1 + n$.

2. Logarithmische Reihe:

$$h(z) = -\log(1 - a\,z) = \sum_{n\geq 1} (a\,z)^n/n \text{ mit } a > 0.$$

Hier sind die Reihenkoeffizienten $h_n = a^n/n$, der Konvergenzradius ist, wie bekannt, $K_h = 1/a$, und der subexponentielle Anteil beträgt $\tilde{h}_n = 1/n$.

3. CATALAN-Zahlen (sehr wichtiges Beispiel):

$$c(z) = \sum_{n\geq 0} c_n\,z^n = \left(1 - \sqrt{1 - 4\,z}\right)/2z$$

Die Koeffizienten von $c(z)$, die sogenannten CATALAN-Zahlen $c_n, n \geq 0$, verdanken ihre Bedeutung für die Informatik der Tatsache, daß sie die Anzahl der vollständigen binären Bäume mit n inneren Knoten (also $n+1$ äußeren Knoten) angeben. Eine intime Kenntnis von Eigenschaften dieser Zahlen c_n ist für Komplexitätsanalysen von Algorithmen, die sich mit Bäumen befassen, unerlässlich. Unter den vielen anderen Bedeutungen dieser Zahlen, die deren Wichtigkeit unterstreichen, findet man die Anzahl der korrekten Klammerausdrücke über einem Alphabet, bestehend aus einem Klammerpaar. Anders ausgedrückt: c_n ist die Anzahl der Wörter der Länge $2n$ der sogenannten DYCK-Sprache, also der wichtigsten kontextfreien Sprache überhaupt.

Es ist nicht schwer, aus einer dieser "kombinatorischen" Bedeutungen von c_n eine rekursive Beziehung herzuleiten:

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-i-1} \quad (n > 0), \quad c_0 = 1$$

die äquivalent ist zu der Funktionalgleichung

$$c(z) = 1 + z \cdot c(z)^2$$

Da dies eine harmlose quadratische Gleichung ist, kann man sie explizit lösen:

$$c(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,z}}{2\,z}$$

und die Reihentwicklung der Wurzel liefert eine explizite Formel

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2\,n}{n}$$

Daraus (wie auch aus der obigen Rekursion) kann man die ersten Werte schnell berechnen:

$$(c_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots)$$

Die Frage, wie schnell diese Folge wächst, lässt sich dank der expliziten Formel und der STIRLING-Formel für $n!$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

leicht beantworten:

$$c_n \approx \frac{1}{n+1}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

und dies zeigt, daß das exponentielle Wachstum durch 4^n gegeben ist — es ist also $K_c = 1/4$ — und daß der subexponentielle Anteil am Wachstum

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{\pi n}} \in \Theta(n^{-3/2})$$

beträgt.

2.2 Zur Bedeutung des Konvergenzradius

Ist $\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ eine Potenzreihe und K_α ihr Konvergenzradius, so bedeutet das, daß auf dem Kreisrand

$$\{\ z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| = K_\alpha\ \}$$

in der komplexen Ebene etwas vorkommt, was den Konvergenzradius der Reihe daran hindert, größer zu sein: (mindestens) eine *Singularität* z_0 der Funktion $\alpha(z)$. Anders formuliert: der Konvergenzradius K_α ist der Radius der größten Kreises um den Nullpunkt, der in seinem Innern keine Singularität der Funktion enthält. Der Begriff *Singularität* kann hier nicht eingehender erörtert werden. Dies präzise zu behandeln ist eine Aufgabe der komplexen Analysis, der *Funktionentheorie*. Hier soll es genügen, dies anhand der vorigen Beispiele zu illustrieren:

1. Geometrische Reihe:

   An der Stelle $z_0 = 1/a$ ist der Ausdruck $1/(1 - a\,z)$ nicht definiert; es handelt sich um eine sogenannte *Polstelle* der Funktion. Polstellen sind Singularitäten eines einfachen Typs.

   Allgemein gilt folgende Aussage: ist $f(z) = p(z)/q(z)$ eine *rationale Funktion*, d.h. sind $p(z), q(z)$ Polynome mit (komplexen) Koeffizienten, so sind die Singularitäten von $f(z)$ genau die Nullstellen des Nennerpolynoms $q(z)$ (vorausgesetzt, daß die beiden Polynome $p(z)$ und $q(z)$ keinen gemeinsamen Teiler (= keine gemeinsame Nullstelle) haben. Der Konvergenzradius von $f(z)$ ist der kleinste Absolutbetrag einer Nullstelle von $q(z)$. Ist also

   $$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n\, z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$$

   eine rationale Funktionen, so kennt man das exponentielle Wachstumsverhalten der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$, wenn man die betragsmäßig kleinste Nullstelle von $q(z)$ kennt.

2. Logarithmische Reihe:

   An der Stelle $z_0 = 1/a$ ist auch $-\log(1 - a\,z)$ nicht definiert. Es handelt sich hier um eine sog. *logarithmische Singularität*.

3. Catalan-Zahlen:

   Hier ist die Situation etwas subtiler: an der Stelle $z_0 = 1/4$ wäre der funktionale Ausdruck $c(z) = (1 - \sqrt{1 - 4z})/(2z)$ durchaus sinnvoll zu definieren. Um zu sehen, daß hier etwas "passiert", muss man sich vergegenwärtigen, daß $\sqrt{}$ eine *mehrdeutige* Funktion ist: $\sqrt{y}$ ist ja definiert als die Lösung(en) der Gleichung $z^2 = y$, und davon gibt es zwei verschiedene, außer wenn $y = 0$ ist. Eine algebraische Gleichung (= Polynomgleichung) n-ten Grades (in z) $p(z, y) = 0$ hat (für festes y) in der Regel n *verschiedene* Lösungen. Werte y, wo dies nicht der Fall ist, nennt man *algebraische Singularitäten.* Auch diese kommen als "Verursacher" eines Konvergenzradius in Frage, so wie man das bei $c(z)$ sieht, wo $y = 1/4$ algebraische Singularität ist.

Bei all diesen Beispielen sieht man, daß sich die "Singularität kleinsten Absolutbetrages", die also den Konvergenzradius bestimmt, auf der positiven reellen Achse befindet. Das ist kein Zufall! Es gilt allgemein der Satz: hat eine Potenzreihe nichtnegative reelle Koeffizienten, so befindet sich eine Singularität kleinsten Absolutbetrages auf der positiven reellen Achse (falls nicht der Konvergenzradius unendlich ist, d.h. überhaupt keine Singularitäten im endlichen Bereich vorhanden sind). Das ist für die Komplexitätsanalyse eine gute Nachricht, denn da sind die Koeffizienten von Natur aus nichtnegativ! Um das exponentielle Wachstumsverhalten einer Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von "Kosten" zu kennen, muß man also nur $\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ auf der positiven reellen Achse untersuchen und dort die kleinste "verdächtige" Stelle ausfindig machen.

Ein instruktives Beispiel zu diese Aussage: Bezeichne m_n die Anzahl der unär-binären Bäume mit genau $n+1$ Knoten. Das sind also Bäume, deren Verzweigungsgrad bei den inneren Knoten entweder 1 oder 2 beträgt. Die treten natürlicherweise da auf, wo man es mit arithmetische Ausdrücken zu tun hat, bei denen sowohl einstellige wie zweistellige Operationssymbole auftreten. Die ersten Werte sind

$$(m_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, \ldots)$$

Im Gegensatz zu der Situation bei den CATALAN-Zahlen gibt es hier keine einfache Formel für die m_n. Das einfachste, was man sagen kann ist

$$m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_k \binom{n}{2k}$$

und wie man daraus etwas über das Verhalten für $n \to \infty$ erfahren soll, ist nicht so klar. Man kann aber (entweder mit Hilfe dieser Summenformel und dem, was man über die CATALAN-Zahlen weiß, oder aber direkt aus dem Modell der unär-binären Bäume) eine Darstellung der zugehörigen Potenzreihe herleiten:

$$m(z) = \sum_{n\geq 0} m_n\, z^n = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}$$

Die kritischen Punkt ist dort, wo der Term unter der Wurzel 0 wird. Nun gilt aber

$$1 - 2z - 3z^2 = (1 + z)(1 - 3z)$$

d.h. kritisch sind die Werte $z_0 = -1$ und $z_1 = 1/3$. Dabei ist $z_1 = 1/3$ der betragsmässig kleinste Wert, als ist der Konvergenzradius von $m(z)$ der Wert $K_m = 1/3$ und man weiß ohne weitere Rechnerei, daß das exponentielle Verhalten von $(m_n)_n \geq 0$ durch 3^n gegeben ist.

Durch stärkere Methoden, die im nächsten Abschnitt nur angedeutet werden, erhält man genauere Auskunft auch über den subexponentiellen Anteil:

$$m_n \approx 3^n \sqrt{\frac{3}{4\,\pi\,n^3}}$$

2.3 Stärkere Methoden

Die obigen Ausführungen sollen zeigen, daß man mit Hilfe des Konvergenzradius einer Potenzreihe oft mit recht elementaren Mitteln zu Aussagen über das Wachstumsverhalten einer Folge von reellen Zahlen kommen kann — zumindest was den exponentiellen Anteil am Wachstum betrifft. Diese erfreuliche Feststellung lässt aber gleichzeitig zwei (miteinander verwandte) Fragen unbeantwortet:

- Wie erfährt man etwas genaueres, quantitatives über das Verhalten des "subexponentiellen" Anteils?
- Was macht man eigentlich, wenn der Konvergenzradius unendlich ist — bei Funktionen also, deren Potenzreihenentwicklung in des gesamten komplexen Ebene konvergiert? (Solche Funktionen, zu denen so bekannte Beispiele wie Polynome, Exponentialfunktion, Sinus usw. gehören, nennt man auch *ganze* Funktionen).

Wiederum kann es hier nur um eine Andeutung gehen. Praktisch alle Methoden zur Beantwortung dieser beiden Fragen ("Sattelpunktmethode", "Methode von Heyman/Richman", "Transfermethode", ...) bedienen sich eines ganz zentralen Resultates der Funktionentheorie, der sog. *Integralformel von* Cauchy: Ist $f(z)$ eine "analytische" Funktion, d.h. hat $f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n\, z^n$$

die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert, so gilt

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \quad (n \geq 0)$$

wobei $\oint$ für ein komplexes Kurvenintegral steht, bei dem sich der Integrationsweg einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Nullpunkt herumwindet, dabei aber natürlich im Definitionsbereich von $f(z)$ verbleibt. Um den Zusammenhang mit vorher Gesehenem herzustellen, und um zu motivieren, warum es Sinn machen könnte, solche Dinge zu betrachten, hier eine ganz simple Anwendung:

Wählt man als Weg um den Nullpunkt einfach den Kreis mit Radius $r > 0$, also

$$\{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| = r\ \} = \{r \cdot e^{i\phi}\ ;\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\ \}$$

wobei $r < K_f$ sein soll, so gilt

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(r \cdot e^{i\phi})}{e^{in\phi}}\, d\phi \quad (n \geq 0)$$

Bezeichnet nun $M_r(f) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ das Maximum von $f(z)$ entlang dieses Integrationswegs, so erhält man

$$|f_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| \frac{M_r(f)}{e^{in\phi}} \right| d\phi = \frac{M_r(f)}{r^n}$$

und das besagt ja gerade

$$|f_n| \in O(r^{-n})$$

für jedes r mit $0 < r < K_f$. Dies ist also nichts anderes als die eine Seite der Abschätzung aus dem Wachstumskriterium mittels Konvergenzradius.

Speziell der Fall $f(z) = e^z$ liefert wegen $f_n = 1/n!$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{e^r}{r^n}$$

und dies gilt für alle $r > 0$, da ja der Konvergenzradius von e^z unendlich ist. Also

$$\frac{1}{n!} \leq \min_{r>0} \frac{e^r}{r^n} = \frac{e^n}{n^n}$$

und das ist ein Schritt in Richtung auf die Formel von Stirling.

Um diesem ersten Schritt noch einen zweiten folgen zu lassen: hier ist ein "Rezept", wie man in vielen Fällen bei Reihen $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n\, z^n$ mit unendlichem Konvergenzradius ($K_f = \infty$) etwas über das Wachstum der Koeffizientenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ erfahren kann:

- sei $a(z) := z \cdot f'(z)/f(z)$ und $b(z) := z \cdot a'(z)$

- berechne $r_n > 0$ mit $a(r_n) = n$ (unter vernünftigen Bedingungen ist r_n eindeutig bestimmt)

- dann gilt

$$f_n \approx \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}}$$

Also kleine Anwendung und Illustration: mit $f(z) = e^z$ ist $a(z) = z$ und $b(z) = z$, $r_n = n$ $(n \geq 0)$ und somit

$$\frac{1}{n!} \approx \frac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}$$

und das kommt der Wahrheit der STIRLING-Formel schon ein gutes Stück näher.

2.4 Literaturhinweise

Wer einmal sehen will, wie die hier nur angedeuteten Methoden funktionieren, wofür man sie einsetzt, bis hin zu Systemen der automatischen Komplexitätsanalyse von Programmen, kann sich in dem folgenden Artikel informieren, der seinerseits reichhaltige Information über grundlegende mathematische und weiterführende Literatur enthält:

> P. Flajolet, B. Salvy, P. Zimmermann : "Automatic average case analysis of algorithms", *Theoretical Computer Science*, Band 79 (1991), 37-109.

Ein Tutorial zu diesem Thema (ohne Berücksichtigung der neuesten Methoden der automatischen Analyse) enthält der Beitrag

> P. Flajolet : "Mathematical methods in the analysis of algorithms and data structures", in: E. Börger (Hrsg.), *Trends in Theoretical Computer Science*, Computer Science Press, 1988, 225-304.
> Gruppenbibliothek Informatik: 14GI/mat 7.2-520.

Schließlich ein enzyklopädischer Handbuchartikel zum Thema:

> J.S. Vitter und P. Flajolet : "Average case analysis of algorithms and data structures", Kapitel 9 im *Handbook of Theoretical Computer Science*, herausgegeben von J.v. Leeuwen, Elsevier, 1990, Band A, 432-524.
> Gruppenbibliothek Informatik: 14GI/mat 7-31.

Das Lehrbuch zum Thema:

R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, 1996.
Gruppenbibliothek Informatik: 14GI/mat 12.2.3–1004