Kapitel 07:
Logik-Kalküle

Grundlage: Inhetveen,

Logik - Eine dialog-orientierte Einführung, Kapitel 6

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Department Informatik

Ausblick: Kapitel 07

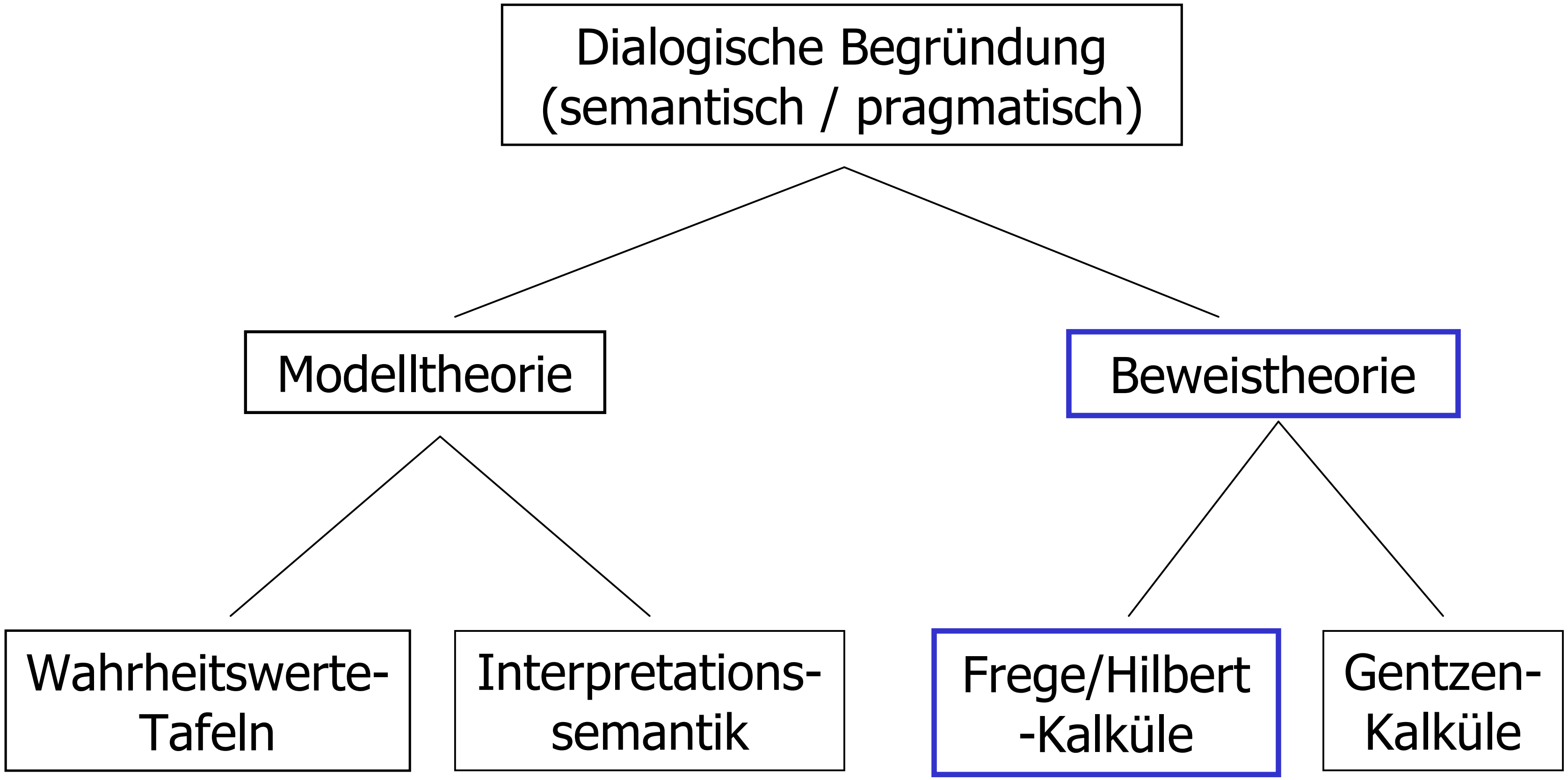
- **Lernziele**:
  - Was ist ein Logikkalkül und was können Logikkalküle leisten?
  - Auf welche Weise wendet man einen Logikkalkül an?
  - Wie lässt sich mit Hilfe von Logikkalkülen zeigen, dass eine Aussage allgemeingültig ist?
  - Welche aussagenlogischen und quantorenlogischen Kalküle gibt es? (exemplarisch)
  - Wie kann man beweisen, dass Logikkalküle konsistent und vollständig sind?

Inhalt

- Allgemeines über Kalküle
- Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik
- Ein Kalkül der Quantorenlogik
  (Gentzen: "Natürliches Schließen")

Überblick

- "Logikbaum"



Allgemeines über Kalküle

- **Ziel**: Entwicklung von Verfahren, mit denen sich
  - inhaltliches logisches Argumentieren ersetzen lässt durch
  - rein schematisches Operieren (Ableiten) mit vorher definierten Zeichen.
- *Der* "**Kalkül**"
  - Herkunft: **calculus** (Rechenstein) zum regelgeleiteten Rechnen mit dem Abakus;
  - heute allgemein vom Rechnen gelöst: **Satz von Regeln zum Umgang mit Zeichen**.

Der Strich-Kalkül SK (Beispiel 1)

- Das Zeichen "⇒" dient als Mitteilungszeichen für eine Aufforderung in Gestalt einer Regel.
  - Bei einer **unbedingten Aufforderung** (**Regel ohne Bedingung**) steht links davon **nichts**; solche Regeln heißen auch **Anfangsregeln**.

    Beispiel: $\Rightarrow$ I

    "Beginne mit dem Notieren eines Strichs"
  - Bei einer bedingten Aufforderung steht links der Repräsentant einer (regelgemäß) erzeugten Figur, ein schematisch zu verwendender Buchstabe (auch: **Eigenvariable**) und rechts die Anweisung, wie daraus eine neue Figur erzeugt werden kann.

    Beispiel: n $\Rightarrow$ n I

    "Nimm etwas schon regelgemäß Erzeugtes ('n') und hänge rechts einen Strich an"

Kalküle

- **Definition**: Ein **Kalkül** besteht aus

    1. einer Menge von Zeichen, aus denen die zu erzeugenden Figuren bestehen, dem **Alphabet**;
    2. einer oder mehreren **Anfangsregeln**, die festlegen, mit welchen Zeichenketten die Konstruktionen von Figuren beginnen;
    3. einer oder mehreren **Fortsetzungsregeln**, die festlegen, wie aus schon konstruierten Figuren weitere herzustellen sind;
    4. einem oder mehreren schematisch zu verwendenden Buchstaben (**Eigenvariablen**), die zur Bezugnahme auf schon konstruierte Figuren dienen.

Kalküle

- Die mit dem Strichkalkül **SK** konstruierbaren Figuren eignen sich als Zählzeichen.
- Von einer beliebigen Figur kann leicht entschieden werden, ob sie im Strichkalkül **herstellbar** ist.
  Schreibweise für **Herstellbarkeit** (**Ableitbarkeit**):

  $\vdash$ n bzw. $\vdash_{SK}$ n

  Beispiel: $\vdash$ |||

  Negation der Herstellbarkeitsbehauptung: $\nvdash$

Der KK-Kalkül (Beispiel 2)

- **KK** ("Kreuz-Kringel"):

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow o\\
&\Rightarrow +\\
a &\Rightarrow ao\\
a &\Rightarrow a+
\end{aligned}
$$

- Beispiel einer ableitbaren Figur ("**Wort**"): $\vdash_{KK}$ o++o+o+++
- **Bemerkung**: In dem so definierten **KK**-Kalkül ist jede beliebige Folge aus den (beiden) Zeichen des Alphabets ableitbar.

Der KK-Kalkül (Beispiel 2)

- Neuer Kalkül $\mathbf{KK}_1$ mit modifizierter letzter Regel, nach der das "+" immer paarweise eingeführt wird: a $\Rightarrow$ +a+
- In $\mathbf{KK}_1$ gilt: Wenn ein Wort nur das Zeichen + enthält, dann ist es höchstens dann ableitbar, wenn die Anzahl der + ungeradzahlig ist;
    - nur die zweite Anfangsregel und die letzte Regel führen das + ein, zuerst eines und dann immer ein Paar.
- **Frage**: Lassen sich den Regeln eines Kalküls weitere Regeln hinzufügen, mit denen es gelingt, lange Ableitungen zu verkürzen, ohne dabei zu Figuren zu gelangen, die sich ohne diese Hinzufügung gar nicht ableiten lassen würden?

Zulässige Kalkül-Regel

- **Definition**: Ist **K** ein Kalkül und (R) eine nicht zu den Regeln von **K** gehörende Regel, in der nur Zeichen und Eigenvariable von **K** vorkommen, so heißt (R) **K-zulässig**,
  wenn jede Zeichenreihe, die in **K** unter zusätzlicher Verwendung von (R) ableitbar ist, auch ohne Verwendung von (R) abgeleitet werden kann.

- Beispiele:

  - n $\Rightarrow$ nn   in **SK**
    Die Regel vergrößert nicht den Vorrat an ableitbaren Figuren, denn jede Kette, die mit ihr abgeleitet werden kann, kann auch ohne sie abgeleitet werden.

  - a $\Rightarrow$ ++a++   in $\mathbf{KK}_1$
    Sie kann in jeder Ableitung ersetzt werden durch zweimalige Anwendung von a $\Rightarrow$ +a+

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- **Definition Alphabet**:
  - **Variable für Elementaraussagen**: kleine lateinische Buchstaben p, q, r, ...
  - **Junktoren**: $\neg$ und $\rightarrow$ (damit definierbar: $\vee$, $\wedge$)
  - **Klammern** (bei Inhetveen: Punkte...)
  - **Eigenvariable** (schematische Buchstaben für Aussageschemata): Großbuchstaben A, B, C, ...
- **Definition wohlgeformte Formeln (wff)**:

$$\Rightarrow \quad p$$

$$A \quad \Rightarrow \quad \neg A$$

$$A,, B \Rightarrow \quad A \rightarrow B$$

Doppelkomma als Meta-Trennzeichen

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Anordnung der wffs:
  - Definition einer lexikographischen Ordnungsrelation über den Zeichen des Alphabets: $\neg < \rightarrow < a < A < \ldots < z < Z$
  - Eine wff A ist vor einer wff B genau dann, wenn die Zeichenreihe A kürzer ist als B oder bei gleicher Länge in Bezug auf die Relation "<" vor B eingeordnet ist.
  - Damit sind alle wffs in eine lineare Reihe gebracht und können durchnummeriert werden: $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$
- **Definition Ersetzungen**:
  - Seien A und B wffs. Man sagt auch: B kommt in A vor, wenn B Teilformel von A ist, und schreibt dies A = A[B].
  - Seien A, B und C wffs und gelte A = A[B]. Ersetzt man B **an allen Stellen**, an denen es in A vorkommt, durch C, so wird das Resultat dieser Ersetzung durch A{C/B} bezeichnet.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- **Definition Kalkül K_F:**

(A1) $\Rightarrow p \to (q \to p)$

(A2) $\Rightarrow (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(A3) $\Rightarrow (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

(A4) $\Rightarrow \neg\neg p \to p$

(A5) $\Rightarrow p \to \neg\neg p$

(R1) $A,, \; A \to B \Rightarrow B$

(R2) $A = A[B],, \; C$ wff $\Rightarrow A\{C/B\}$

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- **Anmerkungen**:
  - (A1) heißt "Gesetz der Prämissenbelastung"
  - (A2) heißt der "Fregesche Kettenschluss"
    $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
  - (A3) ist die (nur klassisch gültige) Kontraposition
  - (A4) und (A5): klassische Äquivalenz einer Aussage mit ihrer doppelten Negation
  - (R1): modus ponens
  - (R2) besagt, dass Teilformeln von schon erzeugten Formeln durch beliebige wffs ersetzt werden dürfen

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beispiel 1: Ableitung in $\mathbf{K_F}$ $\vdash p \rightarrow p$

1	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(A2)
2	$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$	(R2):1{p/r}
3	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	(A1)
4	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$	(R1):3,2
5	$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	(R2):4{$q \rightarrow p/q$}
6	$p \rightarrow p$	(R1):3,5

- Anmerkungen:
  - Z. 4 aus Anwendung des modus ponens auf Z. 3 und 2
  - Z. 5 resultiert aus der Ersetzung von q durch $q \rightarrow p$
  - Z. 6 aus Anwendung des modus ponens auf Z. 3 und 5

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beispiel 2: Ableitung in $\mathbf{K_F}$ $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

1	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	(A3){q/p; p/q}
2	$((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))$ $\rightarrow (\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)))$	(A1){1/p; ¬p/q}
3	$\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))$	(R1):1,2
4	$(\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)))$ $\rightarrow ((\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow$ $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)))$	(A2){¬p/p; ¬q →¬p/q; p →q/r}
5	$(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$	(R1):3,4
6	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	(A1)
7	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	(R1):6,5

- Anmerkungen:
  - Z. 2: in (A1) wird p durch die Formel in Z. 1 ersetzt.
  - Z. 6: die nötigen Ersetzungen von p und q in (A1) wurden nicht mehr eigens aufgeschrieben.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beispiele: Ableitung aus Annahmen in $\mathbf{K_F}$
  - Das Ableiten einfacher Formeln ist bereits sehr aufwendig: Preis für die minimale Ausstattung des Kalküls mit nur zwei Regeln, die keine Anfangsregeln sind.
  - Das Ableiten von Formeln unter zusätzlichen Voraussetzungen ist deutlich einfacher.
- Beispiel 3: $\neg p \vdash p \to q$

1	$\neg p$	(Annahme)
2	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	(A1){¬p/p; ¬q/q}
3	$\neg q \to \neg p$	(R1):1,2
4	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	(A3)
5	$p \to q$	(R1):3,4

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beispiel 4: Ableitung aus mehreren Annahmen $\neg p \to \neg q$,, $q \vdash r \to p$

1	$\neg p \to \neg q$	(Annahme)
2	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$	(A3)
3	$q \to p$	(R1):1,2
4	q	(Annahme)
5	p	(R1):4,3
6	$p \to (r \to p)$	(A1){r/q}
7	$r \to p$	(R1):5,6

- Beispiel 5: $p \vdash p$ – hierfür braucht man bloß p hinzuschreiben!

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Was wurde ohne bzw. mit Annahmen gezeigt?

ohne Annahme	mit Annahme
$\vdash p \to p$	$p \vdash p$
$\vdash \neg p \to (p \to q)$	$\neg p \vdash p \to q$

Es sieht so aus, als dürfe man, um eine Subjunktion ohne Annahmen zu beweisen, die Ableitbarkeit des rechts vom Pfeil Stehenden unter Annahme des links Stehenden beweisen.

Dies ist in der Regel viel einfacher!

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Das **Deduktionstheorem** für $\mathbf{K_F}$

Ist in $\mathbf{K_F}$ $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ beweisbar, so auch $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$.

(für den allgemeinen Fall mehrerer Annahmen — n=1 ergibt obige Tabelle!)

- **Beweis**:
  - Die Voraussetzung der Beweisbarkeit der linken Seite beinhaltet, dass sämtliche Annahmen A_i und B wff sind.
  - Die vorausgesetzte Ableitung sei die Folge von Zeilen C_1,, ...,, C_m, deren letzte identisch mit B sein muss.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Von den übrigen Zeilen C_j wissen wir nur: Jede von ihnen ist
  - entweder eine der Annahmen A_i ;
  - oder aus einer der Anfangsregeln (A1) bis (A5) ,
  - oder aus zwei vorhergehenden Zeilen durch Anwendung von (R1),
  - oder aus einer vorhergehenden Zeile durch Anwendung von (R2) entstanden.
- Damit soll nun eine Ableitung der fraglichen Subjunktion $A_n \rightarrow B$ konstruiert werden. Das ergibt eine neue Liste mit "$A_n \rightarrow$ " vor jedem C_j: $A_n \rightarrow C_1$,, ... ,, $A_n \rightarrow C_m$

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Forts.) :
  - Die letzte Zeile ist identisch mit $A_n \to B$, aber:
    Die neue Liste ist keine Ableitung mehr!
    Daher muss die Liste derart erweitert werden, dass sich eine korrekte Ableitung ergibt. Dies geschieht durch Rückgriff auf die Fallunterscheidung bzgl. der "Herkunft" der C_j.
  - **Fall 1**: C_j ist eine der Annahmen A_i.
    - Handelt es sich bei A_i gerade um die Annahme A_n, so lautet die Zeile i in der zweiten Liste $A_n \to A_n$, die aus der als ableitbar bewiesenen Formel
      $p \to p$ mit Hilfe der Ersetzungsregel (R2) entsteht. Es genügt also, vor die Zeile i die sechs Zeilen des vorhandenen Beweises zu schreiben und für die Rechtfertigung der Zeile i auf (R2) zu verweisen.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Ist C_j ein A_i mit $i < n$, so schreiben wir vor die i-te Zeile zwei neue Zeilen, um eine korrekte Ableitung zu erhalten:
  $C_j \rightarrow (A_n \rightarrow C_j)$
  C_j
  Hiervon ist die erste Zeile als Resultat von (A1) und (R2) zu erhalten, und die zweite ist zulässig, weil uns für die Formel C_j, die ja nichts anderes als A_i ist, weiterhin als Annahme zur Verfügung steht. Zeile i unserer neuen Liste, also $A_n \rightarrow C_j$, ergibt sich aus den beiden neuen Zeilen mit modus ponens (R1).

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Forts.) :
  - **Fall 2**: C_j ist Resultat einer der Anfangsregeln.
    Dann dürfen wir C_j als korrekt abgeleitet betrachten.
    Also können wir wieder die beiden Zeilen wie bei Fall 1 einfügen und erhalten eine korrekte Ableitung von $A_n \rightarrow C_j$.
  - **Fall 3**: C_j ist Resultat einer Anwendung von (R1) auf zwei weiter oben stehende Zeilen.
    - In der alten Liste, die ja eine korrekte Ableitung ist, gibt es dann zwei Zeilen mit den Nummern $h < j$ und $k < j$, in denen die Formeln C_h und C_k stehen, wobei C_k die Formel $C_h \rightarrow C_j$ ist, denn nur dann ergibt sich C_j durch modus ponens angewandt auf diese beiden Zeilen.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Nun gehen wir in die entsprechenden Zeilen der neuen Liste. Wegen der Art, wie sie erzeugt wurde, wissen wir, dass dort folgendes steht:

  $A_n \rightarrow C_h$
  $A_n \rightarrow (C_h \rightarrow C_j)$

  Hinter die letztgenannte Zeile schreiben wir (erhalten aus (A2) und (R2))

  $(A_n \rightarrow (C_h \rightarrow C_j)) \rightarrow ((A_n \rightarrow C_h) \rightarrow (A_n \rightarrow C_j))$

  Nun können wir modus ponens anwenden und erhalten $((A_n \rightarrow C_h) \rightarrow (A_n \rightarrow C_j))$

  und erneut mit modus ponens die gewünschte Ableitung von $A_n \rightarrow C_j$.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Forts.) :
  - **Fall 4**: C_j ist Resultat einer Anwendung von (R2) auf eine weiter oben stehende Zeile C_h
    - Wir wählen zunächst das kleinste j mit dieser Eigenschaft, also die Zeile j, in der zum ersten Mal eine Ersetzung gemäß (R2) erfolgte. Gehen wir nun in die entsprechende Zeile h der neuen Liste, so darf man wegen $h < j$ die dort stehende Zeile
      $A_n \rightarrow C_h$
      als abgeleitet aufgrund der Fälle 1 bis 3 betrachten.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- In dieser Zeile führen wir rechts vom Subjunktor die gleiche Ersetzung durch, die in der ersten Ableitung auf C_j führte. Das ist ein erlaubter Ableitungsschritt, der das gewünschte
  $A_n \rightarrow C_j$
  liefert. Mit weiteren Zeilen, für deren Ableitung (R2) verwendet wurde, verfährt man dann, von oben nach unten weitergehend, entsprechend.
- Da es nur endlich viele Zeilen gibt, sind wir in endlich vielen Schritten fertig.

q.e.d.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Betrachten wir noch einmal den Spezialfall n=1, dann besagt das Deduktionstheorem: $(A \vdash B) \rightarrow \vdash A \rightarrow B$

  Gilt auch die Umkehrung ?? D.h., erlaubt die Ableitbarkeit von $A \rightarrow B$, auf die Ableitbarkeit von B aus der Annahme A zu schließen?

  - Ja, denn zu einer Ableitung $C_1, ..., C_n$ von $A \rightarrow B$ können wir als erste Zeile die Annahme A hinzufügen und erhalten, weil C_n nichts anderes als $A \rightarrow B$ ist, mit modus ponens sofort B.

- Es gilt also insgesamt:

$$\boxed{\vdash A \rightarrow B \text{ genau dann, wenn } A \vdash B}$$

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Die **Konsistenz von $\mathbf{K_F}$**
  - Welche Formeln (Schemata) haben die Eigenschaft, in $\mathbf{K_F}$ ableitbar zu sein?

    Da der Kalkül dazu dienen soll, das "inhaltliche" Schließen auf "rein mechanisches" Konstruieren zurückzuführen, hat man nur an Kalkülen Interesse, die die beiden folgenden Eigenschaften besitzen:
  - **Konsistenz**: Wenn für ein Aussageschema A gilt $\vdash A$, dann ist A allgemeingültig.
  - **Vollständigkeit**: Wenn ein Aussageschema A allgemeingültig ist, dann gilt $\vdash A$
  - Für den Konsistenzbeweis zeigen wir
    - zuerst, dass jede der Anfangsregeln (A1) bis (A5) nur allgemeingültige Schemata liefert, und
    - anschließend, dass die beiden Fortsetzungsregeln (R1) und (R2) stets von allgemeingültigen Voraussetzungen auf allgemeingültige Schemata führen.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Konsistenz):
  - Da $\mathbf{K_F}$ ein Kalkül der **klassischen** Aussagenlogik ist, kann der erste Schritt mit Wahrheitswertetafeln ausgeführt werden:
    - (A1) und (A3) wurden bereits in Kap. 5 gezeigt.
    - Die klassische Allgemeingültigkeit von (A4) und (A5) ist trivial.
    - (A2) Fregescher Kettenschluss:

p	q	r	(p	→	(q	→	r))	→	((p	→	q)	→	(p	→	r))
w	w	w		w		w		w		w		w		w	
w	w	f		f		f		w		w		f		f	
w	f	w		w		w		w		f		w		w	
w	f	f		w		w		w		f		w		f	
f	w	w		w		w		w		w		w		w	
f	w	f		w		f		w		w		w		w	
f	f	w		w		w		w		w		w		w	
f	f	f		w		w		w		w		w		w	

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Konsistenz, zweiter Teil):

  Die Fortsetzungsregeln (R1) und (R2) führen stets von allgemeingültigen Voraussetzungen auf allgemeingültige Schemata.

  - (R1) modus ponens trivial:

    Wenn wir von den beiden Schemata A und A $\rightarrow$ B wissen, dass sie allgemeingültig sind, dann auch, dass gemäß Zeile 1 der Definitionstafel für den klassischen Subjunktor auch B wahr ist.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- (R2) Ersetzungsregel:

  Die Ersetzung der Teilformel B eines Schemas A durch eine beliebige wff C bedeutet nichts anderes als eine Permutation der Zeilen der Wahrheitswertetafel für A, eventuell unter Wiederholung einiger Zeilen. Wenn ursprünglich unter dem obersten Junktor dieses Schemas immer **w** stand, dann ist das auch nach einer beliebigen Permutation der Zeilen der Fall.

  (Detaillierte Diskussion s. Inhetveen, S. 186f.)

q.e.d.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Die **Vollständigkeit von $\mathbf{K_F}$**:

  Jedes allgemeingültige Aussageschema A ist in $\mathbf{K_F}$ ableitbar.

  - **Definitionen**:
    - Das Zeichen $\bot$ steht abkürzend für ein beliebiges logisch falsches Aussageschema, z.B. $\neg(A \rightarrow A)$
    - Das Zeichen L sei ein Name für eine beliebige – endliche oder unendliche – Liste von wff.

      L heißt **konsistent**, wenn gilt: $\neg(L \vdash \bot)$

      d.h. wenn es unmöglich ist, mit Hilfe von $\mathbf{K_F}$ irgend ein logisch falsches Schema unter zusätzlicher Annahme aller Formeln aus L abzuleiten.

      (Genau: Die Konsistenz ist eine **Relation** zwischen L und $\mathbf{K_F}$).
  - Gibt es überhaupt solche konsistenten Formellisten?
  - **Behauptung**: Die Liste L, die aus **allen** in $\mathbf{K_F}$ ableitbaren Formeln besteht, ist eine konsistente Formelliste.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Vollständigkeit): indirekt – **hier nur als Skizze**
  - Wir wissen: Jedes Schema, das überhaupt in $\mathbf{K_F}$ ableitbar ist, ist allgemeingültig.
  - Ein solches Schema ist z.B. $A \rightarrow A$, daher gilt $\vdash_{K_F} A \rightarrow A$
  - Damit gilt erst recht für eine beliebige Liste L: $L \vdash_{K_F} A \rightarrow A$
  - Hat nun L auch die Eigenschaft $L \vdash_{K_F} \neg(A \rightarrow A)$

    so ist L **nicht konsistent**: L enthält einen Widerspruch.
  - Eine beliebige Formelliste L heißt **maximal konsistent**, wenn L konsistent ist und außerdem gilt, dass für jedes Schema A, das nicht zu L gehört, die aus L durch Hinzufügen von A entstehende Liste L* inkonsistent ist.
  - Für den Fall, dass L unendlich viele Formeln enthält, sei die **Ableitbarkeit** $L \vdash A$ dadurch definiert, dass man sagt: Es gibt eine endliche Liste L' von Formeln aus L, so dass gilt: $L' \vdash A$

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Vollständigkeit, Forts.):
  - Wenn es eine Formel A gibt, für die gilt: $\nvdash_{K_F} A$, dann ist die Liste, die nur die Formel $\neg A$ enthält, konsistent.
    - Beweis:
      Sei $\neg A$ inkonsistent. Dann gibt es laut Definition eine andere Formel A' mit der Eigenschaft $\neg A \vdash \neg(A' \rightarrow A')$

      Nach Deduktionstheorem erhält man $\vdash \neg A \rightarrow \neg(A' \rightarrow A')$

      und durch Kontraposition wird daraus $\vdash (A' \rightarrow A') \rightarrow A$

      Nun gilt aber auch $\vdash A' \rightarrow A'$, so dass (R1) modus ponens liefert: $\vdash A$
      Dies widerspricht der Annahme $\nvdash_{K_F} A$,
      Also ist die Annahme falsch, daher muss $L = \{\neg A\}$ konsistent sein.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Hilfssatz:
  Wenn es überhaupt eine konsistente Liste L gibt, so lässt sie sich zu einer maximal konsistenten Liste L_{max} erweitern, d.h. L_{max} enthält alle Formeln von L, dazu eventuell noch weitere, und L_{max} ist maximal konsistent.
  - Beweis: s. Inhetveen, S. 189f.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- Beweis (Vollständigkeit, Forts.):
  - Nun wird eine Interpretation $\mathcal{J} : A \rightarrow \{w, f\}$ konstruiert, die genau L_{max} als Modell hat, d.h. es wird gesetzt:

    $\mathcal{J}(A) = w$, wenn $A \in L_{max}$

    $\mathcal{J}(A) = f$, wenn $A \notin L_{max}$
  - Von dieser Interpretation wird gezeigt, dass sie den wffs aus A genau die Wahrheitswerte zuordnet, die ihnen auch nach der Definition durch die Wahrheitswertetafeln zukommen. Da der Kalkül nur zwei Junktoren verwendet, genügt es, zu zeigen:

    (a) $\mathcal{J}(\neg A) = w \leftrightarrow \mathcal{J}(A) = f$

    (b) $\mathcal{J}(A \rightarrow B) = w \leftrightarrow \mathcal{J}(A) = f \vee \mathcal{J}(B) = w$

    - Beweis: Inhetveen 190f.

Freges Kalkül der klassischen Aussagenlogik

- **Vollständigkeit**:

  Ist $\neg \vdash A$, dann ist $\{\neg A\}$ konsistent. So kann man L_{max} mit $\neg A \in L_{max}$ und $\mathcal{J} : L_{max} \rightarrow \{w, f\}$ mit $\mathcal{J}(\neg A) = w$ konstruieren.

  Es ist dann also A falsch. Durch Kontraposition wird daraus:

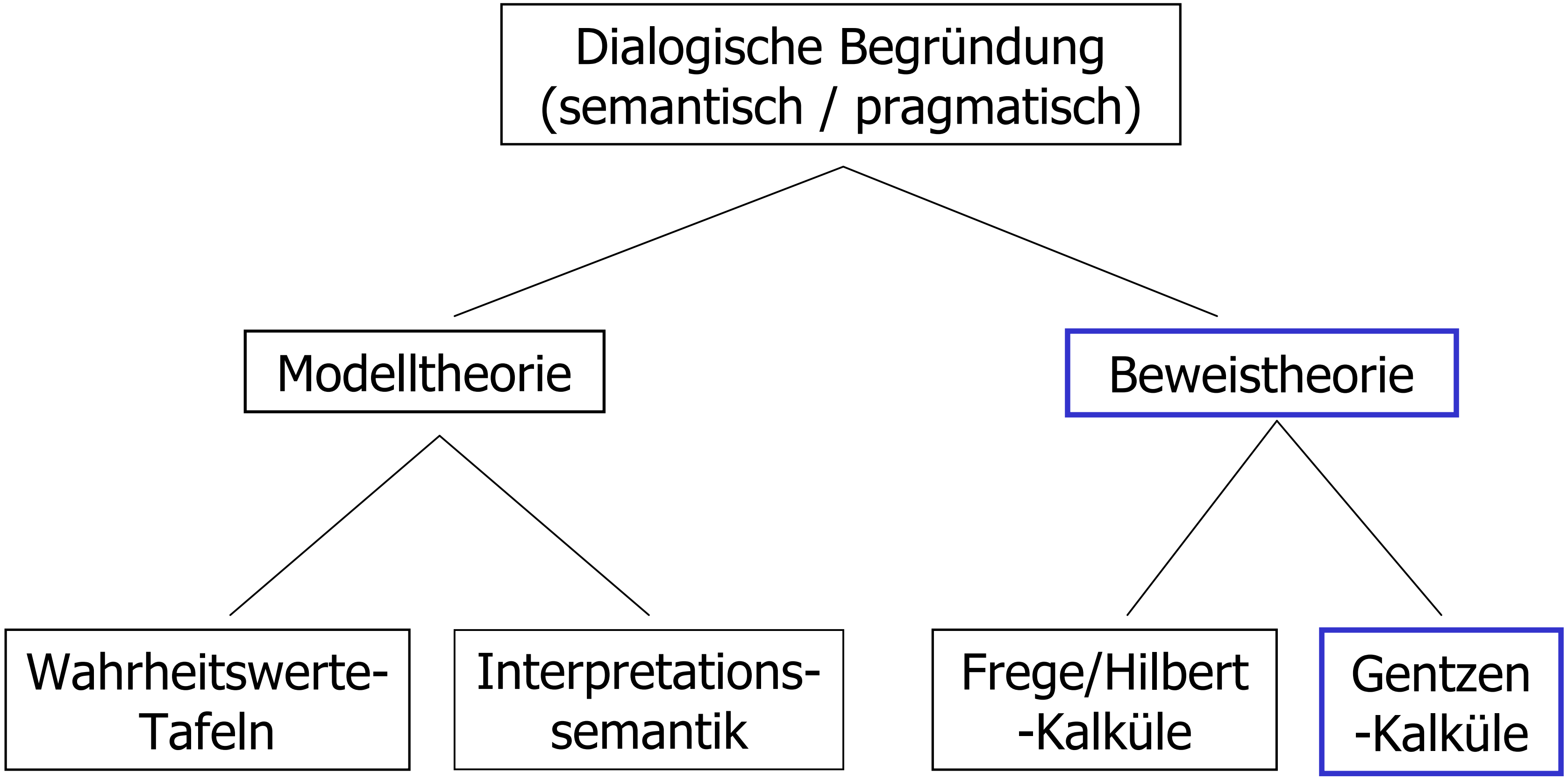
  Ist A klassisch-aussagenlogisch wahr, so gilt $\vdash A$ in $\mathbf{K_F}$.

Ein effektiver Kalkül der Quantorenlogik

- Fregescher Kalkül der klassischen Aussagenlogik:
  - einfach, aber **umständliche Ableitungen**
    ... nur teilweise behoben durch das Deduktionstheorem;
  - **keine** Behandlung **quantifizierter Aussagen**;
  - **klassisch**, d.h. beachtet die LDF-Regel nicht.
- Geht es **nur** um die Behandlung quantifizierter Aussagen, so kann der Fregesche Kalkül [(A1) bis (A5), (R1), (R2)] folgendermaßen ergänzt werden (vgl. R. Davis (1989), Kap. 3):
  - (Q1) $\bigwedge_x (A(x) \rightarrow A(t))$
    wobei A(x) eine wff und t ein Term frei für x in A(x) ist.
  - (Q2) $\bigwedge_x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_x B)$
    wobei A eine wff ist, in der x **nicht** frei vorkommt
  - (R3) $A \vdash \bigwedge_x A$

Überblick

- "Logikbaum"



Ein effektiver Kalkül der Quantorenlogik

- Die Grundidee des folgenden Kalküls **ESK** geht auf Gerhard Gentzen (1909–1945) zurück
    - Gentzen-Kalküle werden auch Kalküle des "**Natürlichen Schließens**" genannt: Ein Ziel Gentzens war es, das Schließen in der Mathematik nachzubilden.
    - Besondere Rolle in der Informatik, u.a. für **Programmverifikation**
- **Ausgangsüberlegung** (*Rekonstruktion* nach Lorenzen, 1980)
    - Damit ein Aussageschema allgemeingültig ist, muss es eine formale Gewinnstrategie geben.
    - Sie endet mit einer Zeile, in der
        - **P** eine Elementaraussage von **O** übernommen hat, oder
        - **O** kein weiteres Argument mehr vorbringen kann.

ESK

- Im ersten Fall können wir die Gewinnstrategie durch folgende Endstellung im Dialog charakterisieren: F(c) **|** c
    - c : die durch **P** übernommene Elementaraussage
    - F : Liste aller Eintragungen auf der **O**-Seite; c kommt darin vor
- Dieser Ausdruck heißt **Sequenz**, genauer, weil es sich um eine Gewinnstellung handelt: **Grundsequenz**.
  Grundsequenzen sind also abgekürzt notierte Gewinnstellungen.
- Im zweiten Fall sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:
    - **O** kann auf einen Angriff nicht mehr reagieren, z.B. weil er $\neg$A behauptet hat, vorher aber schon A behauptete, und das $\neg$A nun von **P** mit "[A] ?" angegriffen wurde.
      Notation: F($\curlywedge$) **|** B "$\curlywedge$" :"falsum", auch: $\perp$; B beliebig

ESK

- **O** erkennt, dass weitere Angriffe sinnlos wären, weil auf der **P**-Seite ein allgemeingültiges Schema steht; für ein solches Schema verwenden wir "$\curlyvee$" "verum" (auch: T)
  Grundsequenz für diese Gewinnstellung: F | $\curlyvee$
- Damit: Drei Grundsequenzen für Anfangsregeln

$$\Rightarrow F(c) \mid c$$

$$\Rightarrow F(\curlywedge) \mid B$$

$$\Rightarrow F \mid \curlyvee$$

- Grundidee für **Fortsetzungsregeln**:
  - Wenn wir eine Grundsequenz haben, die ja eine effektive Gewinnstellung charakterisiert, dann müssen wir durch die Anwendung einer Partikelregel von der vorletzten zur letzten Zeile gekommen sein. Der vorletzten Zeile ist also eine Sequenz zugeordnet, die ebenfalls zu einer Gewinnstellung gehört.

ESK

- D.h., der Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile des Dialogs erfolgte durch Anwendung einer Partikel-Regel; den Weg von der Grundsequenz zur Sequenz für die vorletzte Zeile erledigt eine Regel, die die Anwendung dieser Partikelregel einfach rückgängig macht.
- Beispiel: Gewinnstrategie für ein effektiv allgemeingültiges Schema

0		$(A \wedge B) \rightarrow A$
1	$A \wedge B$?	...
2	A	L?
3		$[A]$ $(\uparrow 1)$

ESK

Wie sehen die Sequenzen aus, die zu dieser Strategie gehören?

Gehe in letzte Zeile und schreibe alles in die Sequenz, was sich auf der **O**-Seite angesammelt hat und was **P** zuletzt behauptet hat:

$$A \wedge B,\ A \mathbin{\Vert} A$$

Dies ist eine Grundsequenz mit A für c eingesetzt.

ESK

- Weiter zurück in Zeile 1 hatte **O** noch kein A stehen, weil die Konjunktion noch nicht angegriffen war. Zugehörige Sequenz:

$$A \wedge B \mid A$$

- Regel, die von der vorhergehenden Sequenz zu dieser führt:

$$F(A \wedge B),\ A \mid A \Rightarrow F(A \wedge B) \mid A$$

Sie erzeugt

  - aus einer Sequenz, die die Situation nach einem Angriff auf eine Konjunktion bei **O** sowie die dazugehörige Verteidigung beschreibt,
  - eine neue Sequenz, die die Situation unmittelbar **davor** beschreibt.

    Daher wird die Regel mit "($\mathbf{O}_\wedge$)" bezeichnet.

- Den Übergang **zur** Zeile 1, also von der Sequenz ausgehend, nimmt folgende Regel "zurück": $\mid (A \wedge B) \to A$

$$(\mathbf{P}_\to) \quad F, A \mid B \Rightarrow F \mid A \to B$$

ESK

- Mit diesen beiden Regeln wurde in zwei Schritten aus einer Grundsequenz eine neue Sequenz erzeugt, die das ursprüngliche Schema repräsentiert.
- Entsprechende Regeln werden für alle sechs logischen Partikeln benötigt:
  - jeweils für die beiden Fälle, dass die jeweilige Partikel auf der **O**- oder **P**-Seite steht.
  - Wenn eine Dialogstellung durch einen Angriff auf eine Konjunktion bei **O** entstanden ist, hatte **P** ja zwei Möglichkeiten für seinen Angriff – daher gehören zu diesem Fall **zwei** Fortsetzungsregeln.

ESK

- Dasselbe gilt, wenn **P** eine Adjunktion behauptet hatte: Er kann wählen, wie er sich verteidigt.
- Stand auf der **P**-Seite eine Konjunktion, so hat **O** das Wahlrecht, wie er angreift. **P** muss für eine Gewinnstrategie in beiden Fällen über eine erfolgreiche Verteidigung verfügen, d.h. die Fortsetzungsregel zur Erzeugung der entsprechenden Sequenz muss **zwei** Prämissen besitzen.
- Dasselbe gilt, wenn es um eine Adjunktion bei **O** geht.

ESK

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & F(c) \mid c & \\
 & \Rightarrow & F(\curlywedge) \mid B & \\
 & \Rightarrow & F \mid \curlyvee & \\
F \mid A,,\ F \mid B & \Rightarrow & F \mid A \wedge B & (P_{\wedge}) \\
F(A \wedge B),\ A \mid C & \Rightarrow & F(A \wedge B) \mid C & (O_{\wedge}) \\
F(A \wedge B),\ B \mid C & \Rightarrow & F(A \wedge B) \mid C & \\
F \mid A & \Rightarrow & F \mid (A \vee B) & (P_{\vee}) \\
F \mid B & \Rightarrow & F \mid (A \vee B) & \\
F(A \vee B),\ A \mid C,,\ F(A \vee B),\ B \mid C & \Rightarrow & F(A \vee B) \mid C & (O_{\vee}) \\
F,\ A \mid B & \Rightarrow & F \mid A \rightarrow B & (P_{\rightarrow}) \\
F(A \rightarrow B) \mid A,,\ F(A \rightarrow B),\ B \mid C & \Rightarrow & F(A \rightarrow B) \mid C & (O_{\rightarrow}) \\
F,\ A \mid \curlywedge & \Rightarrow & F \mid \neg A & (P_{\neg}) \\
F(\neg A) \mid A & \Rightarrow & F(\neg A) \mid C & (O_{\neg}) \\
F \mid A(n) & \Rightarrow & F \mid \bigwedge_x A(x) & (P_{\bigwedge})
\end{array}
$$

Falls n eine Konstante ist, die weder in F noch in $\bigwedge_x A(x)$ vorkommt.

$$
\begin{array}{rcll}
F(\bigwedge_x A(x)),\ A(n) \mid C & \Rightarrow & F(\bigwedge_x A(x)) \mid C & (O_{\bigwedge}) \\
F \mid A(n) & \Rightarrow & F \mid \bigvee_x A(x) & (P_{\bigvee}) \\
F(\bigvee_x A(x)),\ A(n) \mid C & \Rightarrow & F(\bigvee_x A(x)) \mid C & (O_{\bigvee})
\end{array}
$$

Falls n eine Konstante ist, die weder in F noch in $\bigvee_x A(x)$ vorkommt.

Herleitung allgemeingültiger Schemata mit ESK

- Beispiel

1	$A \wedge \neg A, \neg A, A \mid A$	Grundsequenz
2	$A \wedge \neg A, \neg A, A \mid$	$(O_{\neg}) : 1$
3	$A \wedge \neg A, \neg A \mid$	$(O_{\wedge}) : 2$
4	$A \wedge \neg A \mid$	$(O_{\wedge}) : 3$
5	$\mid \neg(A \wedge \neg A)$	$(P_{\neg}) : 4$

- Wie kann man solche Ableitungen finden?

0		$\neg(A \wedge \neg A)$
1	$A \wedge \neg A$	-
2	A	L ?
3	$\neg A$	R ?
4	-	A ?

- Lies formale Gewinnstrategie von hinten und benutze auf der **P**-Seite immer nur die jeweils letzte Eintragung

Herleitung allgemeingültiger Schemata mit ESK

- Das Verfahren, aus einer Strategie im Dialog durch "Rückwärtslesen" eine Ableitung in **ESK** zu konstruieren, funktioniert generell:
  So wurde der Kalkül gerade konstruiert.
- D.h., der Kalkül ist **vollständig**: Jedes allgemeingültige Schema lässt sich in **ESK** ableiten; denn Allgemeingültigkeit ≡ (konstruktive) Existenz einer (formalen) Gewinnstrategie.
- Einwand: **ESK** ist überflüssig, weil man zur Begründung seiner Vollständigkeit auf die vorher bekannten Strategien zurückgreifen muss.
- Ja, so lange es nur um allgemeingültige Schemata geht ...
  aber: der Einwand verliert seine Bedeutung, wenn man – was auch Gentzens Intention war – mit Hilfe von **ESK** die Frage untersucht, ob eine mathematische Disziplin, z.B. die Arithmetik, widerspruchsfrei ist.
- **Ist ESK selbst konsistent ??** ... Beweis erfolgt indirekt.

Der Schnittsatz von Gentzen

- **Satz**: Die Schnittregel

$$F \mid A \,,, \quad F', A \mid B \;\Rightarrow F', F \mid B$$

ist im effektiven Quantorenkalkül **ESK** zulässig.

  - D.h. die Formel B ist auch ohne A herleitbar, A ist eine (zusammengesetzte) Aussage

- **Beweis**: durch Teilformelinduktion bzgl. A

  - Durch die Induktion wird gezeigt, dass für **alle möglichen Zusammensetzungen** von A die Aussage B auch **ohne die Schnittregel**, nur unter Anwendung der Regeln des Kalküls, herleitbar ist.

  - Dabei ist zuerst zu unterscheiden, ob A überhaupt zusammengesetzt ist oder aus einer "**Elementaraussage**" besteht.

Der Schnittsatz von Gentzen

- Fall 1: A ist eine Elementaraussage
- Fall 2: A ist **keine** Elementaraussage
    - Fall 2.1: $A \equiv A_1 \wedge A_2$
    - Fall 2.2: $A \equiv A_1 \vee A_2$
    - Fall 2.3: $A \equiv A_1 \rightarrow A_2$
    - Fall 2.4: $A \equiv \neg A$
    - Fall 2.5: $A \equiv \bigwedge_x A_0(x)$
    - Fall 2.6: $A \equiv \bigvee_x A_0(x)$
- Für alle Fälle ist ein Induktionsbeweis zu führen.
  Dies kann hier nicht im Detail ausgeführt werden, wird aber zur Nacharbeit dringend empfohlen! (Inhetveen S. 197–202)

Die Konsistenz von ESK

- Für jedes beliebige allgemeingültige Schema A – das dann ja in **ESK** herleitbar ist – gilt: $\nvdash_{\mathbf{ESK}} \neg A$
  - **Beweis** mithilfe des Schnittsatzes:
    Seien F, F´ leer, A das allgemeingültige Schema und B gleich $\curlywedge$.
    Dann besagt der Schnittsatz, dass der Übergang von den beiden Prämissen $\mid$ A und A $\mid \curlywedge$ zu der Konklusion $\mid \curlywedge$ erlaubt ist, **wenn** die beiden Prämissen in **ESK** ableitbar sind.
    Die Ableitbarkeit der ersten ist vorausgesetzt.
    Für die zweite Prämisse **gibt es keine Ableitung**, denn
    - der fragliche Ausdruck ist nicht Ergebnis der Anwendung einer Anfangsregel, und
    - von den Fortsetzungsregeln führt keine auf die Sequenz $\mid \curlywedge$
  - Die Sequenz A $\mid \curlywedge$ ist also nicht ableitbar in ESK.
    Nach $(P_{\neg})$ ist dies aber nur eine andere Schreibweise für $\mid \neg A$.
- Damit ist die Konsistenz von **ESK** bewiesen.