Kapitel 06:
Klassische Logik

Grundlage:

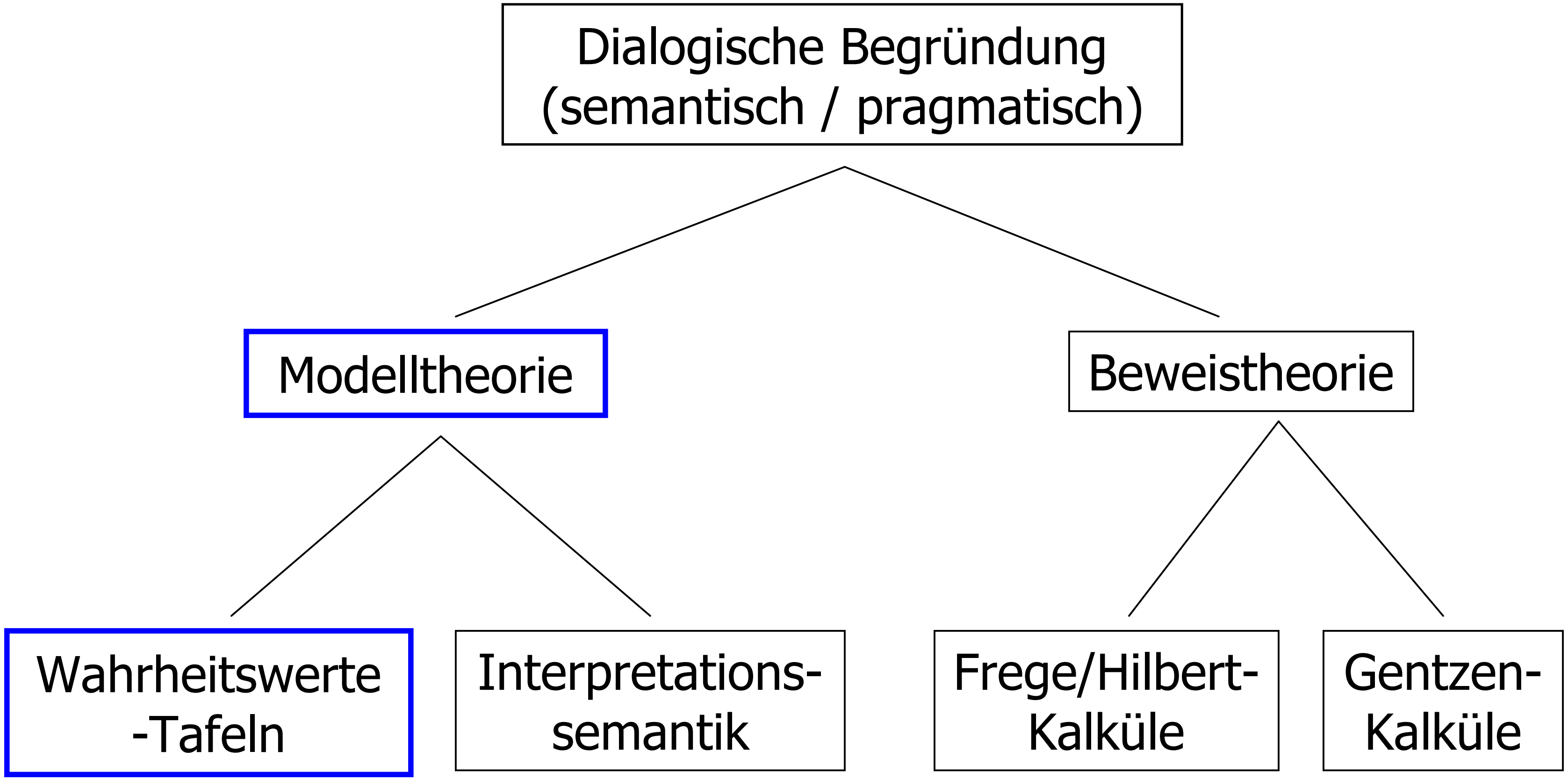
Inhetveen, Kap. 5;
Schöning, Kap.1, 2

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Department Informatik

Überblick

- "Logikbaum"



Ausblick: Kapitel 06

- **Lernziele**:
  - Was unterscheidet die klassische Logik von der effektiven?
  - Wie lässt sich der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage bestimmen?
  - Wie lässt sich die Allgemeingültigkeit (quantorenlogischer) Aussagen feststellen?
  - Was hat es mit dem Begriff der Äquivalenz auf sich?
  - Unter welchen Umständen impliziert eine Aussage (bzw. mehrere Aussagen) eine andere?

Inhalt

- Klassische Junktorenlogik ("Aussagenlogik"), Wahrheitstafeln und Semantische Tableaux
- Klassische Quantorenlogik
- Klassische Dialoge
- Äquivalenzen
- Implikationen
- Klassische Syllogistik

Klassische Junktorenlogik

- Rekapitulation
    - Beginn mit der Feststellung, dass wir (zunächst für nicht zusammengesetzte Aussagen) gemeinsame Kriterien dafür haben müssen, was wir als **Geltungsgrund** für eine Behauptung akzeptieren.
    - Die Geltung logisch zusammengesetzter Aussagen wird in Dialogen durch Zurückführung auf die Geltung ihrer elementaren Bestandteile überprüft.
    - Bei Aussagen, die wir als **formal wahr** bezeichnen, ist eine Gewinnstrategie bekannt, die ohne Rekurs auf die inhaltliche ("materiale") Prüfung der elementaren Teile auskommt.
    - In diesem Sinn sind die formalen Wahrheiten **unabhängig** von den jeweils akzeptierten Geltungskriterien.

Klassische Junktorenlogik

- Klassische Logik **setzt voraus**, dass jede Aussage "an sich" **entweder wahr oder falsch** ist.
    - Die Klärung, welcher der beiden Fälle jeweils vorliegt, wird an die Einzelwissenschaften delegiert. Auch wenn man dies in manchen Fällen nicht entscheiden kann, soll dennoch jede Aussage entweder wahr oder falsch sein.

Die Sprache der Junktorenlogik

- [nachgeholte] **Definition** (Syntax der Junktorenlogik):
  - **Atomare Formeln** (**Primformeln**; repräsentieren Elementar-aussagen) werden durch Zeichen eines Alphabets $\mathcal{A}$, ggf. mit Index, bezeichnet: z.B. A, B, ..., A_1, A_2,...
  - Induktive Einführung der **Formeln**:
    1. Alle atomaren Formeln sind Formeln.
    2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ und $(F \rightarrow G)$ Formeln.
    3. Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel.
- Zur Definition der **Semantik** der klassischen Junktorenlogik:
  - Unter einer **Belegung** oder **Bewertung** einer atomaren Formel versteht man die Zuordnung eines Wahrheitswerts; Bewertung als "Abbildung" $\mathcal{J} : A \rightarrow \{w, f\}$.
  - Bewertungen zusammengesetzter Formeln erhält man mittels der Definition der Junktoren als Wahrheitsfunktionen.

Junktoren als Wahrheitsfunktionen

- Unter der Voraussetzung der Wahrheitswert-Definitheit werden die Junktoren definiert als **Wahrheitsfunktionen**,
  - d.h. als **Funktionen**, die einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen einen **Wahrheitswert zuordnen**.
  - Diese Funktionen werden üblicherweise durch Wertetabellen angegeben: **Wahrheitswerte-Tafeln**.
  - Schreibweise: Unter einer Bewertung $\mathcal{J}$ (d.h. einer Zeile in der Wahrheitswerte-Tafel) wahr: $\mathcal{J} \models A$ (falsch: $\mathcal{J} \not\models A$)

Junktoren als Wahrheitsfunktionen

- Für einstellige Junktoren gibt es kombinatorisch vier Möglichkeiten; ohne die Identität bleiben drei Tafeln:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	wA
w	w
f	w

A	fA
w	f
f	f

- Die erste ist die klassische **Negation**; die beiden anderen lassen sich auf Negation und Konjunktion bzw. Adjunktion zurückführen.

Junktoren als Wahrheitsfunktionen

- Zweistellige Junktoren: 16 Möglichkeiten der Zuordnung von w, f

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
w	w	w	w	w	w	f	w	w	f	w	f	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	f	w	w	f	w	f	f	w	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	w	f	w	w	f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w	f	f	f	w	w	w	f	f	f	w	f

- Klassische Gegenstücke zu den effektiven Junktoren **Konjunktion** (12), **Adjunktion** (2) und **Subjunktion** (4):

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Junktoren als Wahrheitsfunktionen

- Die weiteren Junktoren lassen sich direkt auf die bisher definierten zurückführen;
  - das ausschließende "oder" (XOR) ist in der Informatik wichtig:
  - $wA \equiv A \vee (\neg A)$
  - $fA \equiv A \wedge (\neg A)$

A	B	$A \sqcup B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Junktoren als Wahrheitsfunktionen

- Mit den Wahrheitswertetafeln für die Junktoren lassen sich die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen leicht ausrechnen

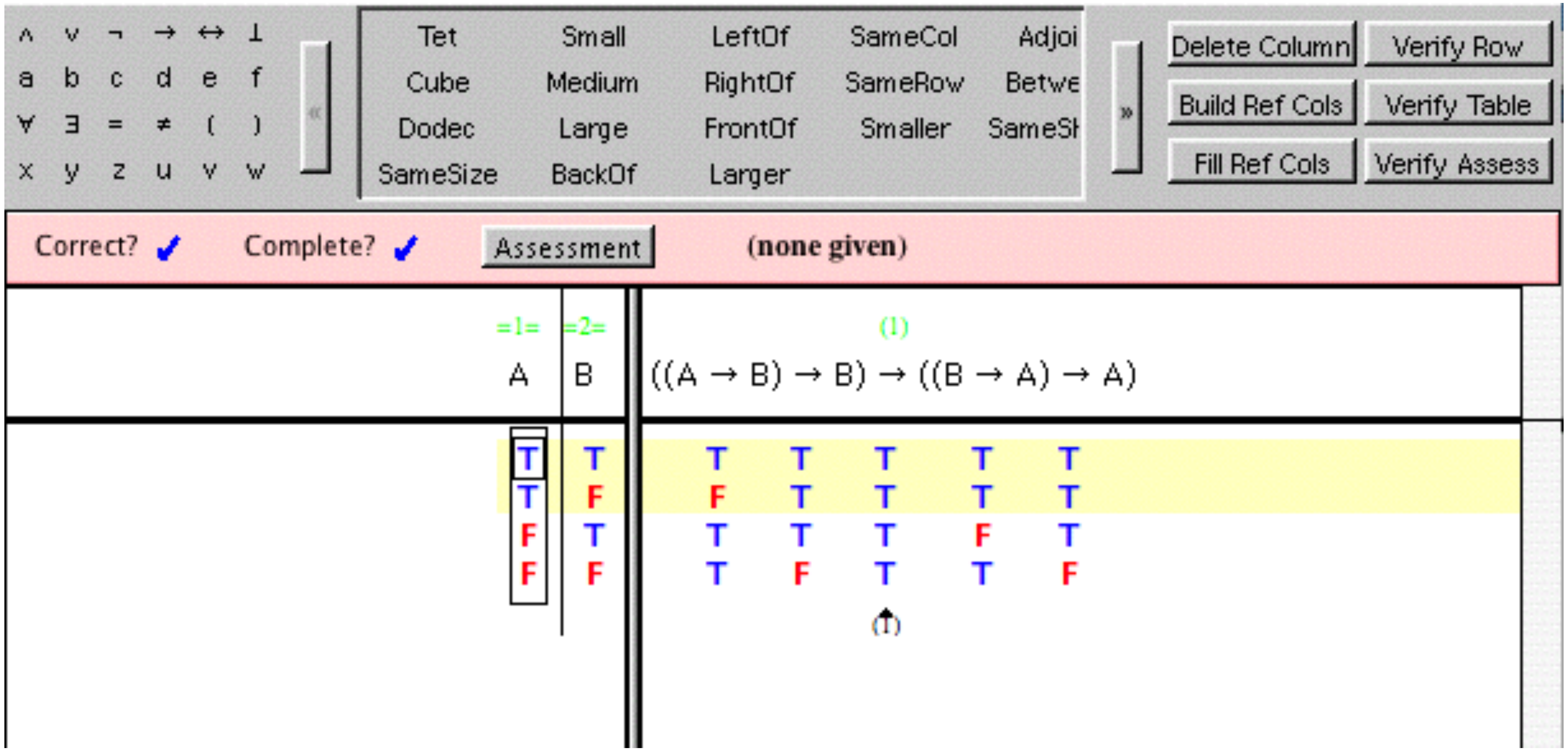
$(A \rightarrow ((A \wedge \neg B) \sqcup (B \vee \neg A))) \rightarrow \neg A$

Mit den obigen Tafeln für $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\sqcup$ und $\rightarrow$ ergibt sich der Reihe nach:

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(A \rightarrow$	$((A \wedge \neg B)$	$\sqcup$	$(B \vee \neg A)))$	$\rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	f	w	w	f
w	f	w	f	w	w	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w	w

Programme für Wahrheitswertetafeln

- Beispiel: Boole 2.5, Barwise/Etchemendy, LPL software



Zur systematischen Erzeugung von Wahrheitswertetabellen

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
w	w	w	w	w
w	w	w	w	f
w	w	w	f	w
w	w	w	f	f
w	w	f	w	w
		⋮		
f	f	w	f	f
f	f	f	w	w
f	f	f	w	f
f	f	f	f	w
f	f	f	f	f

- Alle Kombinationen,
  hier am Beispiel von fünf Aussagenvariablen:
  2^5 Zeilen, allgemein 2^n
- Umcodierung der Tabelle ergibt die Darstellung natürlicher Zahlen im Dualsystem:
  hier
  1 1 1 1 1 $= 2^4+2^3+2^2+2^1+2^0$
  1 1 1 1 0
  ...
  0 0 0 1 1
  0 0 0 1 0
  0 0 0 0 1
  0 0 0 0 0

Modell, Erfüllbarkeit

- **Definition**:
  - Sei F eine Formel und $\mathcal{J}$ eine Bewertung (Belegung, d.h. Zeile einer Wahrheitswerte-Tafel). Falls $\mathcal{J}$ für alle in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist, heißt $\mathcal{J}$ zu F **passend**.
  - Falls $\mathcal{J}$ zu F passend ist und $\mathcal{J}$(F) = wahr, schreiben wir auch $\mathcal{J} \models$ F und sagen: F gilt unter der Belegung $\mathcal{J}$ oder $\mathcal{J}$ **ist ein Modell für** F (auch: **eine Interpretation für** F)
  - Eine Formel F heißt **erfüllbar**, falls F mindestens ein Modell besitzt; andernfalls heißt F **unerfüllbar**.
    Eine Menge von Formeln M heißt erfüllbar, wenn es eine Bewertung $\mathcal{J}$ gibt, die für jede Formel in M ein Modell ist.

Tautologien

- oder **formal wahr** (Schöning: "gültig") werden solche Aussagen ("Formeln") F genannt, die unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen immer wahr sind.
  D.h., Tautologien sind unter allen Bewertungen wahr; jede zu F passende Belegung ist ein Modell für F.
  Schreibweise: $\models F$

- Beispiele:

  Prinzip des Widerspruchs (principium contradictionis)

  Prinzip des ausge-schlossenen Dritten (TND)

A	$\neg$	$(A \wedge \neg A)$
w	w	f
f	w	f

A	$\vee$	$\neg A$
w	w	f
f	w	w

A	$A \to A$
w	w
f	w

Tautologien

- "Gesetz der Prämissenbelastung"

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w

- Peircesche Aussage

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$	$((A \to B) \to A) \to A$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Kontradiktion, Konsistenz, Kontingenz

- **Definition**:
  Eine Aussage A heißt **kontradiktorisch** oder eine **Kontradiktion**, wenn A unter keiner Bewertung (Belegung) wahr ist.
- A heißt **konsistent**, wenn A unter mindestens einer Bewertung wahr ist.
- A heißt **kontingent**, wenn A weder formal wahr noch kontradiktorisch ist.

Satz: A ist eine Tautologie genau dann, wenn $\neg$A unerfüllbar ist.

- Beweis: A ist eine Tautologie
  gdw. jede zu A passende Bewertung ist ein Modell für A
  gdw. jede zu A (und damit zu $\neg$A) passende Bewertung ist kein Modell für $\neg$A
  gdw. $\neg$A besitzt kein Modell,
  gdw. $\neg$A ist unerfüllbar.

Semantische Tableaux

- Das Verfahren der Wahrheitswerte-Tafeln hat den Nachteil, dass die Tafeln exponentiell mit der Anzahl der Teilaussagen wachsen: Bei n Teilaussagen 2^n Zeilen.
- Semantische Tableaux nach E.W. Beth (1962):
    - Prüfen, welche Teile einer Aussage **wahr** und welche **falsch** sein müssen, damit die Aussage **insgesamt falsch** wird.
    - Kommt man dabei zu unvereinbaren Bedingungen, so kann die Aussage nicht falsch werden, also ist sie eine Tautologie.
    - Das Verfahren benutzt eine zweispaltige Tabelle, in die
        - **links** eingetragen wird, welche Teile **wahr** sein müssen, und
        - **rechts**, welche Teile **falsch** sein müssen.

Semantische Tableaux

- Beispiel 1 (Tautologie) Rechts (Z. 1) steht die Ausgangsaussage; nach Def. des klassischen Subjunktors kann sie nur falsch sein, wenn die rechte Subjunktion falsch und A links wahr ist. Damit sie falsch ist, **muss** B wahr und A falsch sein (Z. 3). Somit muss A falsch und wahr sein, damit die Gesamtaussage falsch wird: **Widerspruch**!

wahr	falsch
	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A	$B \rightarrow A$
B	A

- Beispiel 2: Peircesche Aussage Fallunterscheidung nach Z. 2: Die linke Subjunktion kann wahr (a) oder falsch (b) sein. Damit: **Widerspruch**!

	wahr	falsch
1		$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
2	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	A
3a	$A \rightarrow B$	
4a	A	
3b		$A \rightarrow B$
4b	A	

Semantische Tableaux

- Beispiel 3: Das Prinzip des Widerspruchs als Tautologie

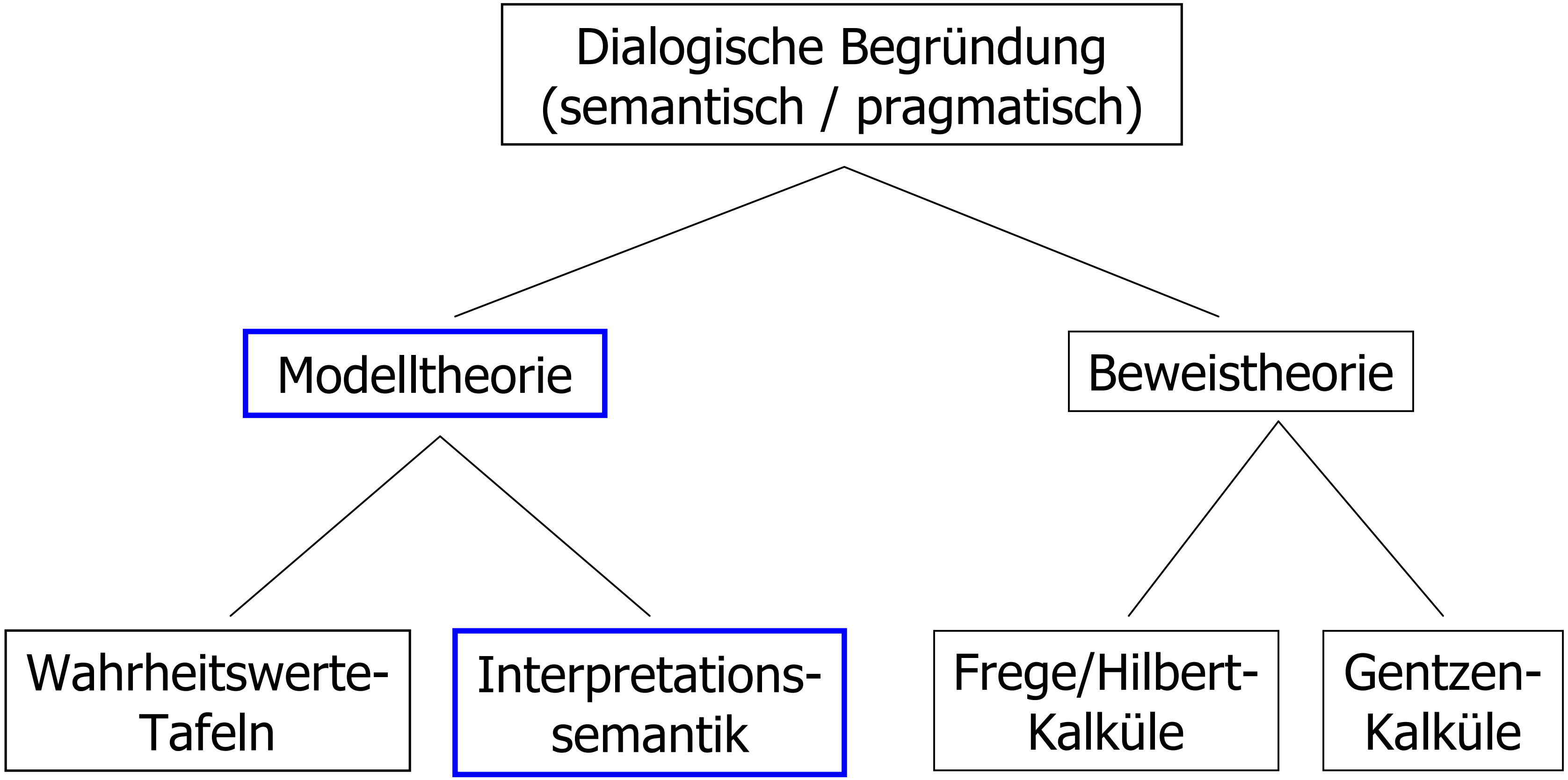
wahr	falsch
	$\neg (A \wedge \neg A)$
$A \wedge \neg A$	
A	
$\neg A$	A

	$\neg (A \wedge \neg A)$
$A \wedge \neg A$?	-
A	L ?
$\neg A$	R ?
-	[A] ?

- Das semantische Tableau und das Dialogprotokoll weisen (bis auf Statuszeichen) dieselben Eintragungen auf!
- Die Opponenteneinträge stehen links, weil Beth seine Tableaux so angeordnet hat, dass die Teilaussagen links stehen, die wahr sein müssen, damit eine Gesamtaussage falsch wird.

Überblick

- "Logikbaum"



Die Sprache der Quantorenlogik

- [nachgeholte] **Definition** (Syntax der Quantorenlogik):
  - Eine **Variable** hat die Form x_i , ein **Prädikatensymbol** hat die Form P_i^k und ein **Funktionssymbol** die Form f_i^k mit i = 1,2,3,... und k = 0,1,2,... .
  - Hierbei heißt i jeweils der **Unterscheidungsindex** und k die **Stelligkeit** (**Stellenzahl**);
    sie können bei Eindeutigkeit weggelassen werden.
  - **Terme** (induktiv definiert):
    1. Jede Variable ist ein Term.
    2. Falls f ein Funktionssymbol mit Stelligkeit k ist, und falls $t_1, ..., t_k$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, ..., t_k)$ ein Term.
    - Hierbei sind Funktionssymbole mit Stelligkeit 0 eingeschlossen, diese heißen **Konstanten** (Klammern werden dann weggelassen).

Die Sprache der Quantorenlogik

- **Formeln** der Quantorenlogik (induktiv definiert):
  - Falls P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine Formel. Genau diese werden **atomare Formeln** genannt.
  - Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.
  - Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ und $(F \rightarrow G)$ Formeln.
  - Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so ist auch $\bigwedge_x F$ und $\bigvee_x F$ eine Formel.
  - Falls F eine Formel ist und F als Teil einer Formel G auftritt, so heißt F **Teilformel** von G.

Die Sprache der Quantorenlogik

- Ein Vorkommen einer Variablen x heißt in einer Formel F **gebunden**, falls x in einer Teilformel von F der Form $\bigwedge_x G$ oder $\bigvee_x G$ vorkommt.
- Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x **frei**.
  (Dieselbe Variable kann also in einer Formel an verschiedenen Stellen sowohl frei als auch gebunden vorkommen.)
- Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt **geschlossen** oder (Darstellung einer) **Aussage**, andernfalls **Aussageform**.
- Die **Matrix** einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen des All- und Existenzquantors samt der dahinter stehenden Variablen gestrichen wird.

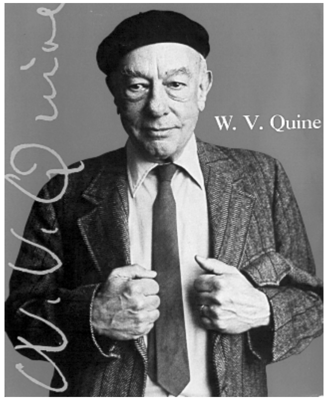
Quantoren in der klassischen Logik

- Die Junktoren in der klassischen Logik als Wahrheitsfunktionen anzusehen, hat direkt zu Verfahren geführt, mit denen sich die klassische Allgemeingültigkeit eines Schemas prüfen lässt.
- Mit den Quantoren tritt das Problem auf, dass eine Definition mit Hilfe von Wahrheitswerten nur gelingt, wenn
  - man den **Allquantor als eine Abkürzung für eine Konjunktion** und
  - den **Existenzquantor als Abkürzung für eine Adjunktion mit endlich vielen Gliedern** verstehen darf.

Quantoren in der klassischen Logik

- Wie kann man aber Aussagen über unendlichen Gegenstandsbereichen, z.B. den natürlichen Zahlen, einen Wahrheitswert zuschreiben?
- Naheliegend: $\Lambda_x A(x)$ wird als wahr definiert, wenn sich für jede zulässige Ersetzung von x durch a eine wahre Aussage A(a) ergibt.
- Problem: Setzt voraus, was erst definiert werden soll – Was heißt "für **jede** zulässige Ersetzung"?

Quantoren in der klassischen Logik



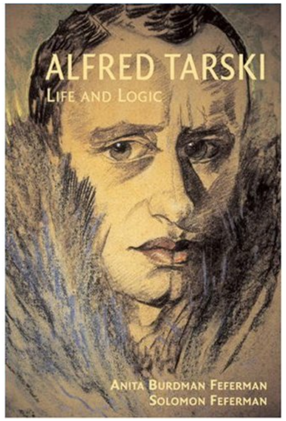
- Ausweg in der klassischen Logikliteratur, z.B. William Van Orman Quine (1908–2000)
  - **Axiomatische** Einführung einiger klassisch allgemeingültiger All- bzw. Existenzaussagen, aus denen mit Hilfe einer Schlußregel (modus ponens) weitere allgemeingültige quantorenlogische Aussagen abgeleitet werden können, z.B.

    (1) $\bigwedge_x (A(x) \rightarrow A(x))$

    (2) $\bigwedge_x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\bigwedge_x A(x) \rightarrow \bigwedge_x B(x))$

    (3) $A \rightarrow \bigwedge_x A(x)$, wobei x **nicht frei** in A!
  - (1) und (2) sind unproblematisch, da effektiv allgemeingültig
  - (3) hat kalkültechnischen Charakter (hierzu mehr unten, Kap. 7)
- **Alternative** auf dialogischer Basis: Schemata des Typs $\bigwedge_x A(x)$ sind klassisch allgemeingültig, wenn es eine formale Gewinnstrategie für sie gibt, die die Reihenfolgeregel (LDF) verletzt.

Modelltheoretische Semantik (Interpretationssemantik) für die klassische Quantorenlogik



Zur Motivation:

- Alfred Tarski (1902–1983)
  - Untersuchungsgegenstand:
    Axiomatische Theorien der modernen Mathematik.
- Der Ursprung dieser axiomatischen Theorien liegt in der Entdeckung von "Strukturgleichheiten" innerhalb der klassischen Mathematik, z.B.:
  - Aussagensysteme über die Addition ganzer Zahlen und die Multiplikation positiver rationaler Zahlen haben dieselbe Form.

Modelltheoretische Semantik

- Da mit jedem System von Aussagen in einem Gebiet der Mathematik dort auch alle logischen Folgerungen aus diesem System gelten, lohnt es sich dann, wenn man in verschiedenen Gebieten Aussagensysteme derselben Form gefunden hat, die logischen Folgerungen dieser Systeme zu untersuchen – ohne Bezugnahme auf ein "konkretes" Gebiet der Mathematik. (Lorenzen, Metamathematik, § 13)
- Zwei Axiomensysteme, die dieselben Aussagen logisch implizieren, sind als **gleichwertig** zu betrachten: Sie stellen dieselbe "**Struktur**" dar.

Modelltheoretische Semantik

- "**Träger**" der Strukturen sind die Mengen; eine Menge mit einem System von Relationen und Funktionen, die für sie definiert sind, heißt **Relationalstruktur**, die Menge selbst auch **Grundmenge**.
- Seien in dem darzustellenden Axiomensystem die Formeln aus gewissen atomaren Formeln und Termen zusammengesetzt. Werden den atomaren Symbolen gewisse Relationen, Funktionen und Elementen einer Relationalstruktur eineindeutig zugeordnet, so spricht man von einer "**Interpretation**" des Axiomensystems.
- Die Relationalstruktur (bzw. die Zuordnung) heißt dann ein "**Modell**" des Axiomensystems, wenn bei dieser Zuordnung alle Axiome des Systems in wahre Aussagen in der Relationalstruktur übergehen. Die Objektvariablen der Axiome sind dabei zu interpretieren als Variable für die Elemente der Grundmenge.

Modelltheoretische Semantik

- **Definition** (**Interpretationssemantik** der Quantorenlogik nach Schöning, Kap. 2):

  Eine **Struktur** ist ein Paar $A = (U_A, I_A)$, wobei U_A eine beliebige nicht leere Menge ist, die **Grundmenge** von A (auch: **Individuenbereich**, **Universum**), und I_A eine Abbildung, die

  - jedem k-stelligen Prädikatensymbol P (das im Definitionsbereich von I_A liegt), ein k-stelliges Prädikat über U_A zuordnet,
  - jedem k-stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereich von I_A liegt), eine k-stellige Funktion auf U_A zuordnet,

Modelltheoretische Semantik

Eine **Struktur** ist ein Paar $A = (U_A, I_A)$, wobei U_A eine beliebige nicht leere Menge ist, die **Grundmenge** von A (auch: **Individuenbereich**, **Universum**), und I_A eine Abbildung, die

- ...
- jeder Variablen x (sofern I_A auf x definiert ist) ein Element der Grundmenge U_A zuordnet.
- Abkürzende Schreibweise: P^A statt I_A (P), analog f^A, x^A.
- Ist F eine Formel und A eine solche Struktur, so heißt A zu F **passend**, falls I_A für alle in F vorkommenden P–, f–Symbole und Variablen definiert ist.

Modelltheoretische Semantik

- (Forts. Schöning)
  - Sei F eine Formel und A eine zu F passende Struktur. Für jeden Term t, den man aus den Bestandteilen (Variablen, Funktionssymbolen) von F bilden kann, wird der **Wert** von t in der Struktur A, bezeichnet durch A(t), induktiv definiert
    1. Falls t = x (Variable), so ist $A(t) = x^A$,
    2. Falls t die Form $t = f(t_1, ..., t_k)$ mit $k \geq 0$ hat, so ist $A(t) = f^A(A(t_1), ..., A(t_k))$.
  - Analog wird der (**Wahrheits**-) **Wert** der Formeln F unter der Struktur A induktiv definiert:
    1. Falls F die Form $F = P(t_1, ..., t_k)$ hat:

$$A(F) = w, \text{ falls } (A(t_1), ..., A(t_k)) \in P^A,$$
$$= f, \text{ sonst.}$$

Modelltheoretische Semantik

- (Forts. Schöning)

  2. Falls F die Form $F = \neg G$ hat, so ist
     $A(F)$ = w, falls $A(G)$ = f,
     = f, sonst.
  3. Falls F die Form $(G \wedge H)$ hat, so ist
     $A(F)$ = w, falls $A(G)$ = w und $A(H)$ = w,
     = f, sonst.
  4. Falls F die Form $(G \vee H)$ hat, so ist
     $A(F)$ = w, falls $A(G)$ = w oder $A(H)$ = w,
     = f, sonst.
  5. Falls F die Form $F = \bigwedge_x G(x)$ hat, so ist
     $A(F)$ = w, falls *für alle* $d \in U_A$ gilt: $A_{[x/d]}(G) = w$
     = f, sonst.
  6. Falls F die Form $F = \bigvee_x G(x)$ hat, so ist
     $A(F)$ = w, falls *es ein* $d \in U_A$ *gibt* mit: $A_{[x/d]}(G) = w$
     = f, sonst.

Modelltheoretische Semantik

- (Forts. Schöning)

  Hierbei bedeutet A[x/d] diejenige Struktur A´, die überall mit A identisch ist bis auf die Definition von $x^{A'}$: Es sei nämlich $x^{A'} = d$, wobei $d \in U_A = U_{A'}$ – unabhängig davon, ob I_A auf x definiert ist oder nicht.

- Falls für eine Formel F und eine zu F passende Struktur A gilt: A(F) = w, so schreibt man $A \models F$ ("F **gilt** in A" oder "A ist **Modell** für F ").

- Falls jede zu F passende Struktur ein Modell für F ist, so schreibt man
  $\models F$ ("F ist **gültig** "), andernfalls $\not\models F$

- Falls es mindestens ein Modell für die Formel F gibt, so heißt F **erfüllbar**, andernfalls **unerfüllbar**.

Klassische Dialoge

... als weitere Möglichkeit

- Rekapitulation
  - Überprüfung der klassischen Gültigkeit zusammengesetzter Aussagen im Dialog war in Kap. 1 angekündigt worden ("Aufhebung der LDF-Regel").
  - Einige Beispiele wurden bei Hypothesendialogen (Kap. 5) angegeben, wie man auch unter Einhaltung der LDF-Regel mit TND-Zusatzhypothesen die klassische Allgemeingültigkeit von Subjunktionen zeigen kann.
  - Klassische Logik **setzt voraus**, dass jede Aussage "an sich" entweder wahr oder falsch ist.

Junktorenlogische klassische Dialoge

- "Duplex negatio affirmat" $\neg\neg A \rightarrow A$

klassisch ohne LDF

0		$\neg\neg A \rightarrow A$
1	$\neg\neg A$?0	...
2	-	$\neg A$?1
3	A ?2	-
4		[A] ($\uparrow$1)

Letzter Angriff von **O** in Z.3; **P** verteidigt sich in Z.4 aber auf den Angriff auf Z1.

effektiv mit TND

0	$A \vee \neg A$		$\neg\neg A \rightarrow A$	
1	$\neg\neg A$?0		...	
2	A	$\neg A$	?0	
3		-	[A] ($\uparrow$1)	[$\neg$A] ?1
4		A ?3		-
5		-		[A] ?2

P führt in Z.2 nicht einen Gegen-angriff auf Z.1, sondern er greift die Zusatzhypothese an.

Junktorenlogische klassische Dialoge

- "Claviussches Gesetz"

klassisch ohne LDF

0		$(\neg A \to A) \to A$
1	$\neg A \to A$	...
2	?0	$\neg A$?1
3	-	-
4	A ?2	[A] $(\uparrow 1)$

effektiv mit TND

0	$A \vee \neg A$		$(\neg A \to A) \to A$	
1	$\neg A \to A$?0		...	
2	A	$\neg A$	?0	
3		A*	[A] $(\uparrow 1)$	$[\neg A]$?1
4		-		[A] ?2

A*: Verteidigung auf angegr. Z.1 *oder* Angriff auf $\neg A$ des Prop., Z.3 – Unterschied belanglos, da nur Übernahme !!

- ... nun das TND selbst:

0			$A \vee \neg A$	
1	?0		A	$\neg A$
2	?1	A ?1	...	[A] $(\uparrow 1\text{links})$

0	$A \vee \neg A$		$A \vee \neg A$	
1	?0		...	
2	A	$\neg A$	?0	
3			[A] $(\uparrow 1)$	$[\neg A]$ $(\uparrow 1)$

Weitere nur klassisch gültige Schemata

1. $(B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$ — Kontraposition – **auch effektiv gültig**!
2. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ — klassische Kontraposition
3. $\neg(A \to B) \to A$
4. $A \vee (A \to B)$
5. $(A \to B) \vee (B \to A)$
6. $(A \to B) \vee (B \to C)$
7. $\neg(A \to C) \to (B \to A)$
8. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ — klassische **DeMorgansche** Gesetze
9. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (A \vee B)$ — – " –
10. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$ — – " –

Die Umkehrungen der klassischen DeMorganschen Gesetze (8, 9, 10) sind **effektiv allgemeingültig**!

"Stabilitätshypothesen"

- Wir haben nun vier Verfahren zur Überprüfung der klassischen Allgemeingültigkeit von Aussageschemata:
  - Methode der Wahrheitswerte-Tafeln
  - Semantische Tableaux (Beth)
  - Formale Strategien unter Verletzung der LDF-Regel
  - Effektiv formale Strategien mit TND-Hypothesen
    - Stattdessen sind auch **Stabilitätshypothesen** möglich: $\neg\neg A \to A$

"Stabilitätshypothesen"

- Beispiele:

Claviussches Gesetz

0	$\neg\neg A \to A$	$\neg(A \to B) \to A$
1	$\neg(A \to B)$?0	...
2	...	$\neg\neg A$?0
3	$\neg A$?2	-
4	-	$A \to B$?1
5	A ?4	[A] ?3

nicht Z.1 !!

Peirce-Formel

0	$\neg\neg A \to A$	$((A \to B) \to A) \to A$
1	$(A \to B) \to A$	...
2	A	$A \to B$?1
3	...	$\neg\neg A$?0
4	$\neg A$?3	-
5	-	[A] ?4

Quantorenlogische klassische Dialoge

- Effektiv allgemeingültig: $\bigvee_x \neg A(x) \rightarrow \neg \bigwedge_x A(x)$

Gewinnstrategie

0	$\bigvee_x \neg A(x)$	$\neg \bigwedge_x A(x)$
1	$\bigwedge_x A(x))$	-
2	$\neg A(x_0)$	?0
3	$A(x_0)$	x_0 ?1
4	-	$[A(x_0)]$?2
5	†	√

Quantorenlogische klassische Dialoge

- Wie steht es mit der Umkehrung $\neg \bigwedge_x A(x) \rightarrow \bigvee_x \neg A(x)$?

0	$\neg \bigwedge_x A(x)$	$\bigvee_x \neg A(x)$
1	?	$\neg A(x_0)$
2	$A(x_0)$?	-
3	-	$\bigwedge_x A(x)$?0
4	x_1 ?3	...

P müsste an dieser Stelle $A(x_1)$ behaupten

Fortsetzung $\Rightarrow$

Quantorenlogische klassische Dialoge

- **P** kann $A(x_1)$ nur dann behaupten, wenn **O** das x_1 identisch mit dem x_0 gewählt hätte...
- Unter Verzicht auf die LDF-Regel könnte **P** sich aber auf den ersten Angriff (Z.1) erneut mit $\neg A(x_1)$ verteidigen und gewinnt:

0	$\neg \bigwedge_x A(x)$	$\bigvee_x \neg A(x)$
1	?	$\neg A(x_0)$
2	$A(x_0)$?	-
3	-	$\bigwedge_x A(x))$?0
4	x_1 ?3	...
5		$\neg A(x_1)$ (neu $\uparrow$1)
6	$A(x_1)$?5	-
7	$\dagger$	$[A(x_1)]$ ($\uparrow$4)

Quantorenlogische klassische Dialoge

- Gibt hierfür eine effektive Strategie mit Zusatzhypothesen?
  - In diesem Fall reicht die Hinzufügung der quantorenlogischen Version des TND nicht aus; eine nähere Betrachtung zeigt (Inhetveen, S. 135f.), dass **P** die Möglichkeit haben müsste, seine Anfangsbehauptung noch einmal zu wiederholen.
  - Dies sehen die Dialogregeln nicht vor; daher muss man die Negation der **P**-Behauptung zu den Hypothesen hinzunehmen (s. Z.8 rechts!).

0	$\neg \bigvee_x \neg A(x)$			
1	$\bigwedge_x (A(x) \vee \neg A(x))$			
2	$\neg \bigwedge_x A(x)$			$\bigvee_x \neg A(x)$
3	?2			...
4	-			$\bigwedge_x A(x)$?2
5	x_0 ?4			...
6	$A(x_0) \vee \neg A(x_0)$			x_0 ?1
7	$A(x_0)$	$\neg A(x_0)$		?6
8		-	$[A(x_0)]$ ($\uparrow$5)	$\bigvee_x \neg A(x)$?0
9		?8		$[\neg A(x_0)]$ (7)

Quantorenlogische klassische Dialoge

- Doppelte Verneinung ist Bejahung?

effektiv:

0	$\bigwedge_x A(x)$	$\neg\neg\bigwedge_x A(x)$
1	$\neg\bigwedge_x A(x)$?0	-
2	-	$[\bigwedge_x A(x)]$?1
3	†	√

Umkehrung gilt nur klassisch:

0	$\neg\neg\bigwedge_x A(x)$	$\bigwedge_x A(x)$
1	x_0 ?0	...
2	-	$\neg\bigwedge_x A(x)$?0
3	$\bigwedge_x A(x)$?2	-
4	$A(x_0)$	x_0 ?3
5	†	$[A(x_0)]$ (↑1)
6		√

Quantorenlogische klassische Dialoge

...oder mit Zusatzhypothese, dieses Mal genügt TND:

0	$\bigwedge_x (A(x) \vee \neg A(x))$			
1	$\neg\neg \bigwedge_x A(x)$		$\bigwedge_x A(x)$	
2	x_0 ?1		...	
3	$A(x_0) \vee \neg A(x_0)$		x_0 ?0	
4	$A(x_0)$	$\neg A(x_0)$	?3	
5		-	$[A(x_0)]$ ($\uparrow$2)	$\neg \bigwedge_x A(x)$?1
6		$\bigwedge_x A(x)$?5		-
7		$A(x_0)$		x_0 ?6
8		-		$[A(x_0)]$?4

Quantorenlogische klassische Dialoge

- Weitere (nur) klassisch gültige Schemata
  1. $\bigwedge_x (A \vee B(x)) \rightarrow A \vee \bigwedge_x B(x)$
  2. $\bigwedge_x (A(x) \vee B) \rightarrow \bigwedge_x A(x) \vee B$
  3. $(A \rightarrow \bigvee_x B(x)) \rightarrow \bigvee_x (A \rightarrow B(x))$
  4. $(\bigwedge_x A(x) \rightarrow B) \rightarrow \bigvee_x (A(x) \rightarrow B)$
  5. $\neg \bigvee_x \neg A(x) \rightarrow \bigwedge_x A(x)$ (Umkehrung gilt auch effektiv)
  6. $\neg \bigwedge_x \neg A(x) \rightarrow \bigvee_x A(x)$ — " —
  7. $\neg \bigwedge_x A(x) \rightarrow \bigvee_x \neg A(x)$ — " —
- **Satz**: Ein Aussageschema ist klassisch allgemeingültig genau dann, wenn es von geeigneten Zusatzhypothesen effektiv impliziert wird.

  Beweis: s. K. Lorenz, P. Lorenzen: Dialogische Logik, Darmstadt, 1978

Äquivalenzen

- **Definition** (Semantische Äquivalenz, Werteverlaufs-Äquivalenz):

  Zwei Aussageschemata A und B heißen (klassisch) **äquivalent** gdw. für die Zusammensetzung $A \leftrightarrow B$ **jede** Bewertung (**Interpretation**) ein Modell ist.

- Sind zwei Schemata äquivalent, so schreibt man auch $A \equiv B$.

- Jede korrekte Äquivalenz repräsentiert eine Tautologie, sie "ist" aber keine Tautologie, weil '$\equiv$' **kein** logischer Junktor, sondern ein **meta-logisches** Zeichen ist.

Äquivalenzen

- Beispiel: $A \sqcup B$ und $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ sind äquivalent.

A	B	$A \sqcup B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$(A \vee B)$	$\wedge$	$(\neg$	$(A \wedge B))$
w	w	w	f	f	w
w	f	w	w	w	f
f	w	w	w	w	f
f	f	f	f	w	f

Äquivalenzen

- Der "**Peircesche Strich**" (NOR, "weder ... noch ..."), definiert durch

A	B	A | B
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

ist äquivalent zu

A	B	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- Mit seiner Hilfe kann man jede klassische Wahrheitsfunktion, d.h. jede junktorenlogische Verknüpfung, definieren:
  - $A \mid A \equiv \neg A$
  - $(A \mid B) \mid (A \mid B) \equiv A \vee B$
  - $((A \mid A) \mid B) \mid ((A \mid A) \mid B) \equiv A \rightarrow B$
  - $(A \mid A) \mid (B \mid B) \equiv A \wedge B$
- Analoges gilt für den "**Shefferschen Strich**" (NAND)

  $A \mid\mid B \rightleftharpoons \neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B)$

Achtung: Verwechslungsgefahr!

Weitere klassische Äquivalenzen

$A \vee A \equiv A$	Idempotenz	$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	...Assoziativität
$A \wedge A \equiv A$		$A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow C$	
$A \vee A \equiv A \wedge A$		$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$	
$A \vee B \equiv B \vee A$	Kommutativität	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	DeMorgansche Gesetze
$A \wedge B \equiv B \wedge A$		$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	Verschmelzung	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	Distributivität
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$		$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	Assoziativität	$A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$	

Implikationen

- Sind zwei Schemata A und B derart beschaffen, dass jedes Modell von A auch ein Modell von B ist, so sagt man, dass

  B von A **impliziert** wird und schreibt $A \prec B$

- Andere Lesarten: A impliziert B; B folgt aus A; aus A folgt B; von B kann auf A geschlossen werden; der Schluss von A auf B ist gültig.

- $A \prec B$ besagt also: Das Schema "$A \rightarrow B$" ist logisch wahr.

  - A heißt dann auch **Prämisse** oder **Antezedens** der Implikation, B ihre **Konklusion** oder **Sukzedens**.

- Damit ergibt sich sogleich mit obiger Definition der Äquivalenz: $A \equiv B$ **gdw.** $A \rightarrow B$ **und** $B \rightarrow A$ logisch wahr,

  d.h. wenn $A \prec B$ und $B \prec A$. (Notation: "**metalogisch**")

Beispiele gültiger Implikationen

- 1. $A \wedge B \prec A$
  ergibt sich direkt aus der Wahrheitswerte-Tafel für die Konjunktion: Bei der einzigen Interpretation, in der die Prämisse den Wahrheitswert W erhält, hat auch A den Wahrheitswert W, d.h. jedes Modell von $A \wedge B$ ist auch ein Modell von A.

- 2. $(A \vee B) \wedge \neg A \prec B$

A	B	$(A \vee B)$	$\wedge \neg A$
w	w	w	f
w	f	w	f
f	w	w	w
f	f	f	f

Das einzige Modell der Prämisse steht in Z. 3; Dort steht auch w als Wahrheitswert von B

Beispiele gültiger Implikationen

3. $(A \vee B) \to C \prec A \to C$

A	B	C	$A \vee B$	$\to C$	$A \to C$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	f	w	w
f	f	f	f	w	w

Die Modelle der Prämisse stehen in Z. 1, 3, 5, 7, 8.

I.A. hat die Konklusion **mehr** Modelle, hier z.B. in Z. 6. Das bedeutet, dass die Implikation **nicht umkehrbar** ist, dass also **keine Äquivalenz** vorliegt.

4. $A \wedge (A \to B) \prec B$ ("modus ponens", MP)

A	B	$A \wedge$	$(A \to B)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	w
f	f	f	w

Beispiele gültiger Implikationen

5. $\neg B \wedge (A \rightarrow B) \prec \neg A$ ("modus tollens", MT)

A	B	$\neg B \wedge (A \rightarrow B)$		$\neg A$
w	w	f	w	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

- **Nicht gültig**: $B \wedge (A \rightarrow B) \prec A$

Beispiele gültiger Implikationen

- Resumé:

  Die Definition der Gültigkeit einer Implikation besagt, dass jedes Modell der Prämisse auch ein Modell der Konklusion ist, m.a.W.: Wenn die Prämisse einer gültigen Implikation wahr ist, dann auch die Konklusion.

  Jedoch nicht: Ein korrekter Schluss führt **immer** zu einer wahren Konklusion – das tut er **nur** unter der Zusatzbedingung, dass die Prämisse wahr ist.

Implikationen mit mehreren Prämissen

- **Definition**: Der Ausdruck $A_1, A_2, \ldots, A_n \prec B$ ist eine **gültige Implikation** gdw. jedes **gemeinsame Modell** aller Prämissen auch ein Modell der Konklusion ist.
- Diese Definition ist ersichtlich gleichwertig mit der Bedingung "$A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n \rightarrow B$" ist logisch wahr.

- Damit können auch als Implikationen mit zwei Prämissen geschrieben werden
    - **Modus ponens**: $A, A \rightarrow B \prec B$
    - **Modus tollens**: $\neg B, A \rightarrow B \prec \neg A$

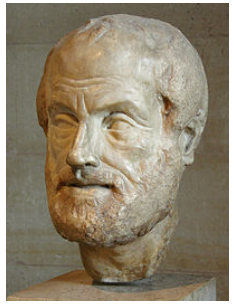
Implikationen mit mehreren Prämissen

- Transitivität der Subjunktion: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \prec A \rightarrow C$

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow C$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

- Beispiele für Implikationen mit drei Prämissen:
  - "Konstruktives Dilemma": $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \prec B \vee D$
  - "Destruktives Dilemma" : $A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D \prec \neg A \vee \neg C$

Anmerkung zur Klassischen Syllogistik



- Aristoteles (384–322 v.Chr.):
  Welche der kombinatorisch möglichen Schlüsse sind korrekt, wenn man die folgenden Bedingungen aufstellt:
  - Jeder Schluss soll **zwei Prämissen** (und eine Konklusion) haben.
  - Jeder in den Schlüssen auftretende Satz soll eine der vier Formen haben:

(a) Jedes A ist B.	—— "generell bejahend",	**a**ffirmo
(i) Einige A sind B.	—— "partiell bejahend",	aff**i**rmo
(e) Kein A ist B.	—— "generell verneinend"	n**e**go
(o) Einige A sind nicht B.	—— "partiell verneinend"	neg**o**

  - Die beiden Prämissen sollen einen "Begriff", den "Mittelbegriff", gemeinsam haben.
  - Der gemeinsame "Begriff" der beiden Prämissen soll in der Konklusion nicht mehr vorkommen.
- Ein gültiger Schluss, der diese Bedingungen erfüllt, heißt **Syllogismus**.

Anmerkung zur Klassischen Syllogistik

- Beispiele: Notation traditionell | quantorenlogisch
  - Alle Menschen sind sterblich. M **a** S $\bigwedge_x (M(x) \rightarrow S(x))$
  - Einige Vögel sind Insektenfresser. V **i** I $\bigvee_x (V(x) \wedge I(x))$
  - Kein Hund ist ein Esel. H **e** E $\neg \bigvee_x (H(x) \wedge E(x))$
  - Einige Hunde sind keine Terrier. H **o** T $\bigvee_x (H(x) \wedge \neg T(x))$
- Schlussformen: Kandidaten
  - Alle Menschen sind sterblich, Kein Hund ist ein Mensch, also: Kein Hund ist sterblich. ***???***
  - Alle Menschen sind sterblich, kein Stein ist ein Mensch, also: Kein Stein ist sterblich.
- Verfahren zur Bestimmung gültiger (und ungültiger) Syllogismen:
  - traditionell kombinatorisch
  - über Relationenprodukte (s. Inhetveen S. 158–164)