Kapitel 05:
Wahrheit

Grundlage: Inhetveen,

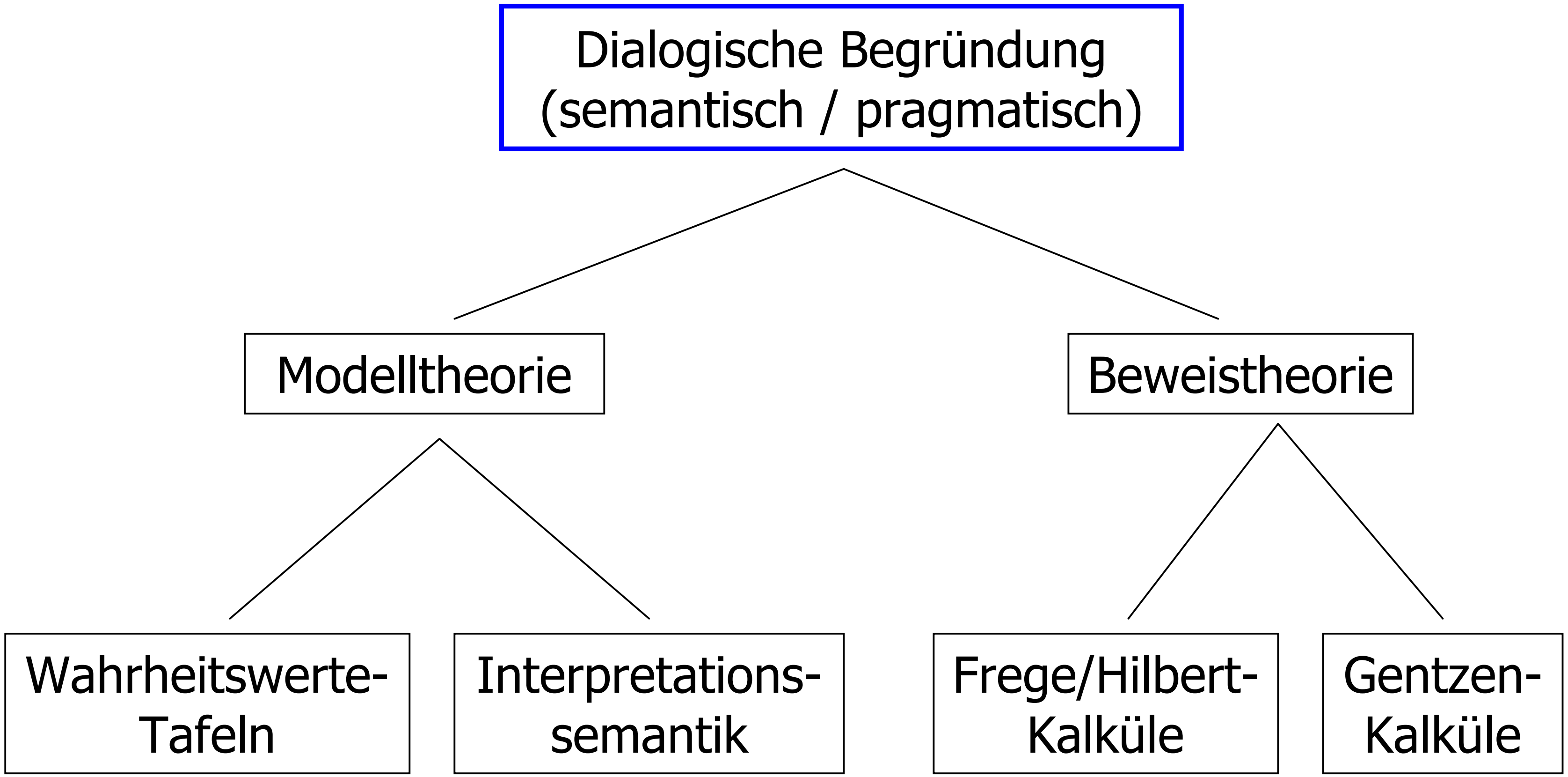
Logik - Eine dialog-orientierte Einführung, Kapitel 3

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Department Informatik

Überblick

- "Logikbaum"



Ausblick: Kapitel 05

- **Lernziele**:
  - Was ist materiale Wahrheit?
  - Worin unterscheidet sich materiale Wahrheit von formaler Wahrheit?
  - Wie kann eine Aussage allgemeingültig sein?
  - Was ist ein logischer Schluss?
  - Wie kann man einen logischen Schluss oder eine zusammengesetzte Aussage auf ihre Allgemeingültigkeit hin prüfen?
  - Welche typischen Implikationen gibt es?

Inhalt

- Materiale Wahrheit
- Allgemeingültigkeit
    - Beispiele
- Logisches Schließen
    - Hypothesendialoge
- Implikationen
    - Beispiele
    - Satz
- Der Nutzen des logischen Schließens

Materiale Wahrheit

- Im folgenden geht es darum, zu klären, wann, wie und warum der Begriff der **Wahrheit** für die Logik ins Spiel kommt
    - Hier nicht: "Wahrheitstheorien" wie z.B.
        - Korrespondenztheorie
        - Konsensustheorie, ...
        - Literatur hierzu (u.a.):
            - Skirbekk, G. (Hg.): Wahrheitstheorien. Frankfurt: Suhrkamp (stw 210), 1977
            - Janich, P.: Was ist Wahrheit? München: Beck (wissen BsR 2052), 1996

Materiale Wahrheit

- Aristoteles (384–322 v.Chr.), Erste Analytik, 53b:
  - "Die Prämissen, durch die der Schluss zustande kommt, können nun wahr und können falsch sein und es kann die eine wahr und die andere falsch sein. Der Schlusssatz aber ist notwendig entweder wahr oder falsch.
    Aus wahren Prämissen nun kann man nichts Falsches schließen, aus falschen aber Wahres ..."
- Die Logik, insofern sie das korrekte Schließen lehrt, hat dafür zu sorgen, dass aus Wahrem immer nur Wahres geschlossen werden kann.
- Wir brauchen einen für die dialogische Logik geeigneten Wahrheitsbegriff!

Materiale Wahrheit

- **Aktueller Stand**:
  - Durch einen den Regeln folgenden Dialog wird eine logisch zusammengesetzte Behauptung im Hinblick auf ihre Geltung dadurch überprüft, dass die Geltung der elementaren Teilaussagen, aus denen sie besteht, von den beiden Dialogpartnern – je nach der vorliegenden Zusammensetzung – nachgewiesen wird.
  - Das war ja gerade die Idee, einige Zusammensetzungen als logische Zusammensetzungen auszuzeichnen.
  - Zur Überprüfung der elementaren Teilbehauptungen ist eine vorherige Einigung darüber erforderlich, was für sie als ein Geltungsgrund angesehen wird.

Materiale Wahrheit

- Über Gewinn und Verlust eines Dialogs entscheiden:
    - die Art und Weise, wie die Ausgangsbehauptung zusammengesetzt ist,
    - die gemeinsam anerkannten Geltungskriterien (historisch wie auch kulturell veränderlich), sowie
    - die besonderen Umstände der Dialogführung.
- Daher kann man eine Behauptung nicht schon als wahr bezeichnen, weil man einmal einen Dialog um sie gewonnen hat, z.B. weil der Partner besonders ungeschickt war oder einfach aufgegeben hat.

Materiale Wahrheit

- **Definition**:

  Als **wahr** bezeichnen wir solche Behauptungen, für die es eine Art der Dialogführung für den Proponenten gibt, die ihm erlaubt, **gegen jeden Opponenten** zu gewinnen.

  - Eine solche Art der Dialogführung bezeichnen wir auch als **Gewinnstrategie**.
  - Wenn es eine Gewinnstrategie für den **Opponenten** gibt, nennen wir die fragliche Behauptung **falsch**.

Materiale Wahrheit

- Beim Beispiel "Es ist nicht alles Gold, was glänzt" hat die Gewinnstrategie darauf beruht, dass wir ein Ding kennen, das glänzt, aber nicht aus Gold ist.
- Damit man eine Gewinnstrategie hat, muss man hier etwas "inhaltlich" über "die Welt" wissen, deshalb heißen wahre Behauptungen dieses Typs **material wahr**.
- Über die materiale Wahrheit einer Behauptung entscheiden nur noch
    - die anerkannten Geltungskriterien und
    - die Art der Zusammensetzung mit logischen Partikeln.

Materiale Wahrheit

- Ändern sich die Geltungskriterien, können sich auch die materialen Wahrheiten ändern:
    - Es gibt keine ewigen (materialen) Wahrheiten.
    - Durch Verbesserung der Geltungskriterien kann das Wissen verbessert werden.
- Mit der Einführung der **Prädikatoren** **wahr** und **falsch** ist **nicht** festgelegt, dass **jeder Behauptung** genau einer der beiden zugesprochen werden kann.

Materiale Wahrheit

- Um eine Behauptung als eine **Aussage** zu bezeichnen, genügt es, dass über sie ein Dialog geführt werden kann, der nach endlich vielen Schritten mit einer Entscheidung über Gewinn oder Verlust endet.
- Über die Existenz einer Gewinnstrategie ist hierbei nichts gesagt:
  - manchmal findet man eine Strategie für **P**;
  - die Tatsache, dass man manche Behauptungen gegen jeden **O** gewinnt, bedeutet noch nicht, dass es auch eine Gewinnstrategie gibt.
- Beispiel: "Es gibt keine außerirdischen Lebewesen."

0		$\neg\bigvee_x(L(x)\wedge A(x))$
1	$\bigvee_x(L(x)\wedge A(x))$	-
2		?

Materiale Wahrheit

- Beispiel (Forts.):
  - In (2) müsste **O** nun den Namen eines außerirdischen Lebewesens nennen;
  - nach heutigem Wissensstand wird das kaum gelingen.
  - **O** wird also aufgeben – das heißt aber nicht, dass wir eine Strategie haben, denn wir wissen nicht, dass dies auch in aller Zukunft so sein wird.
  - Die fragliche Behauptung bleibt, was ihre Wahrheit oder Falschheit betrifft, unentschieden.

Materiale Wahrheit

- Ein Einwand, der hinterfragt werden muss:
  "Das heißt doch nicht, dass diese (oder jede andere beliebige) Aussage nicht doch 'an sich' wahr oder falsch sei – man weiß es eben noch nicht."
    - Man kann den Satz behaupten, nur nicht effektiv beweisen!
    - Nebenbei: nicht-wissen vs. wissen, dann wahr oder falsch
- Es geht um die Behauptung, dass für eine beliebige Aussage A stets gilt:
  $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ ("**tertium non datur**" – tnd)

Materiale Wahrheit

- Behauptung: das Aussageschema **A** $\vee\neg$**A** ist wahr

0			$A \vee \neg A$	
1	?		A	$\neg$A
2	?	A ?	...	-
3		...		?(2)

- In (1) muss **P** entscheiden, ob er sich mit A oder $\neg$A verteidigt: der Dialog verzweigt sich
  - links: **O** greift dieses A mit '?' an und **P** gewinnt nur dann, wenn er in der Lage ist, A zu begründen. Da wir dies nicht wissen: '...' in (2.l)
  - rechts: **P** wählt in (1) $\neg$A als Verteidigung. Das wird in (2) mit 'A ?' angegriffen. Eine Verteidigung auf diesen Angriff gibt es nicht, also erfolgt in (3) ein Gegenangriff von **P**, in dem er (2), rechte Spalte von **O** bezweifelt. Er gewinnt nur, wenn es ihm gelingt, das A von **O** zu widerlegen – daher nur '...'

Materiale Wahrheit

- Was muss **P** wissen, um eine Strategie zu haben?
  - Kriterium, für welche Verteidigung er sich in (1) entscheiden soll, d.h. ob er mit der linken oder der rechten Spalte gewinnt:
  - Links: Er muss A begründen, d.h. eine Strategie für A haben, d.h. er muss schon vor dem Dialog um $A \vee \neg A$ wissen, dass A wahr ist.
  - Rechts: Er muss eine Strategie zur Widerlegung von A haben, also vorher schon wissen, dass A falsch ist.

Materiale Wahrheit

- Also: Eine effektive Gewinnstrategie für A $\vee \neg$A kennt **P** nur unter der Voraussetzung, dass er schon weiß, ob A wahr oder falsch ist. Da er das nicht für jedes beliebige A wissen kann, gibt es keine effektive Gewinnstrategie. Das heißt aber auch:
- Ob A wahr oder falsch ist, kann **P** nur wissen, wenn A jedenfalls wahr oder falsch ist: Eine effektive Strategie für A $\vee \neg$A gibt es nur unter der Voraussetzung, dass A $\vee \neg$A gilt und für die Strategie benutzt wird.
  Ein Beweis, der das, was bewiesen werden soll, schon benutzt ?!?
- ... Festhalten am tnd: Klassische Logik

Allgemeingültigkeit

- Nun: "Verschärfung" des Wahrheitsbegriffs, dass wir auch von den (historisch veränderlichen) Geltungskriterien frei werden.
- Rekapitulation: $\bigwedge_x (W(x) \rightarrow L(x)) \wedge W(Logik)) \rightarrow L(Logik)$

  "Wenn jede Wissenschaft lehrbar ist und es sich bei der Logik um eine Wissenschaft handelt, dann ist die Logik lehrbar."
- Besonderheit des Dialogs: **P** konnte die zwei von ihm zu begründenden Elementaraussagen einfach von **O** übernehmen, weil dieser dieselben Aussagen vorher schon behauptet hatte.

Allgemeingültigkeit

- Dies befreit von den jeweils geltenden Kriterien für das Zutreffen von Elementaraussagen:
    - Wenn **P** eine Elementaraussage übernehmen kann, weil sie vorher schon von **O** behauptet wurde, dann könnte er, bevor er das tut, diese Aussage immer erst angreifen.
    - Kann **O** sie dann nicht begründen, **egal mit welchen Geltungskriterien**, dann hätte er auf jeden Fall verloren.
    - Kann er sie aber begründen, **egal mit welchen Geltungskriterien**, dann könnte **P** bei einem Angriff von **O** auf diese Aussage einfach die Begründung von **O** wiederholen.

Allgemeingültigkeit

- **Definition**: Als "**formal**" **wahr** bezeichnet man eine Behauptung, bei der es für jeden Proponenten eine Gewinnstrategie gibt, nach der er jede von ihm zu vertretende Elementaraussage von Opponenten übernehmen kann.
  Eine solche Gewinnstrategie bezeichnet man auch als **formale Gewinnstrategie**.
- Seien Dialoge, in denen eine formale Gewinnstrategie verfolgt wird, "**formale Dialoge**" genannt. Wir können eine eigene Spielregel formulieren, die dieser besonderen Situation Rechnung trägt:
- **Spielregel für formale Dialoge**:
  In einem Dialog um die formale Wahrheit einer Behauptung dürfen

  1. Elementaraussagen des Opponenten nicht angegriffen werden und
  2. vom Proponenten nur solche Elementaraussagen behauptet werden, die der Opponent schon vorher behauptet hat.

Allgemeingültigkeit

- Anmerkung:

  (1) ist keine willkürliche Beschränkung der Rechte von **P**, denn

  - erlaubt man die Angriffe, ändert das nichts daran, ob man eine Strategie findet oder nicht;
  - kann **O** sich nicht verteidigen, hat er verloren,
  - kann **O** sich verteidigen, so kann **P** diese Verteidigung einfach wiederholen.
  - D.h.: das Angriffsverbot verkürzt die Dialoge – sonst nichts.

Allgemeingültigkeit

  - Es kommt nicht auf den Inhalt der Elementaraussage an; eine formale Gewinnstrategie beruht einzig darauf, wie eine komplexe Aussage logisch zusammengesetzt ist;
    die Teilaussagen können beliebig sein, weil auf sie nicht weiter eingegangen wird.
- Bei der Untersuchung formaler Wahrheiten geht es um **Aussageschemata**;
  - die zu untersuchenden Behauptungen werden gleich als Schemata notiert.
- Lässt sich für ein logisch zusammengesetztes Aussageschema eine formale Gewinnstrategie finden, so sagt man:
  Das Aussageschema ist allgemeingültig.

Allgemeingültigkeit

- Der Übergang von der materialen zur 'formalen' Wahrheit bedeutet **keinen neuen Wahrheitsbegriff**, sondern einen Übergang zur Untersuchung von **allgemeinen Eigenschaften**, die **jedem** Wahrheitsbegriff **unabhängig** von den verwendeten Geltungskriterien für Elementaraussagen zukommen:
  - Die allgemeingültigen Aussageschemata stellen formale Bedingungen dar, denen jeder angemessene Begriff einer materialen Wahrheit genügen muss.
- Beispiele:

1. Das Schema $A \rightarrow A$ ist allgemeingültig

0		$A \rightarrow A$	
1	A ?	[A]	Übernahme!

Allgemeingültigkeit: Beispiele

2.

0		$\neg(A \wedge \neg A)$
1	$A \wedge \neg A$?	-
2	A	L?
3	$\neg A$	R?
4	-	[A](2) ?

3.

0		$(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg A$
1	$A \wedge \neg A$?	$\neg A$
2	A ?	-
3	$\neg A$	R?
4	-	[A](2) ?3

4. (rechts beliebiges B statt $\neg A$)

0		$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$
1	$A \wedge \neg A$?	...
2	A ?	L?
3	$\neg A$	R?
4	-	[A](2) ?3

Allgemeingültigkeit: Beispiele

5.

0		$(A \wedge (A \to B)) \to B$
1	$A \wedge (A \to B)$	...
2	A	L?
3	$A \to B$	R?
4	B	[A] ?
5		[B](↑1)

6.
P kann in beiden Zweigen gewinnen

0			$((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$	
1	$(A \vee B) \wedge \neg A$		...	
2	$A \vee B$		L?	
3	$\neg A$		R?	
4	A	B	?2	
5	-		[A] ?3	[B](↑1)

Allgemeingültigkeit: Beispiele

0		$\neg\neg\bigwedge_x a(x) \rightarrow \bigwedge_x \neg\neg a(x)$
1	$\neg\neg\bigwedge_x a(x)$?	$\bigwedge_x \neg\neg a(x)$
2	? n	$\neg\neg a(n)$
3	$\neg a(n)$?	$\neg\bigwedge_x a(x)$?1
4	$\bigwedge_x a(x)$?	? n
5	$a(n)$	$[a(n)]$?3

- In (2) greift **O** **P** (1) mit n an und **P** antwortet durch Einsetzen von n.
- (3) zeigt den Angriff von **O** auf **P** (2) und **P** antwortet mit einem Gegenangriff auf **O** (1).

Allgemeingültigkeit: Beispiele

(Wieder-holung)

0		$\neg\neg\bigwedge_x a(x) \rightarrow \bigwedge_x \neg\neg a(x)$
1	$\neg\neg\bigwedge_x a(x)$?	$\bigwedge_x \neg\neg a(x)$
2	? n	$\neg\neg a(n)$
3	$\neg a(n)$?	$\neg\bigwedge_x a(x)$?1
4	$\bigwedge_x a(x)$?	? n
5	$a(n)$	$[a(n)]$?3

- **O** kontert in (4), was **P** mit einem Angriff mit genau demselben n beantwortet, das **O** in (2) benutzt hatte.
- Damit (5) ist **O** gezwungen, mit a(n) zu antworten, was **P** übernimmt und damit gewinnt.
- **P** muss also nur seine zuletzt aufgestellte Behauptung verteidigen, **O** aber alle bisher aufgestellten Behauptungen.

Allgemeingültigkeit: Beispiele

- Das quantorenlogische Beispiel invertiert: **nicht allgemeingültig**!

0			$\bigwedge_x \neg\neg a(x) \rightarrow \neg\neg \bigwedge_x a(x)$	
1	$\bigwedge_x \neg\neg a(x)$		? n	$\neg\neg \bigwedge_x a(x)$
2	$\neg\neg a(n)$	$\neg \bigwedge_x a(x)$	$\neg a(n)$	$\bigwedge_x a(x)$
3	a(n)	? m	?	a(m)
4		?		

- In (1) kann **P** wählen: Links fragt er nach **O** (1), rechts antwortet er mit der rechten Teilformel der Behauptung.
- Im linken Teildialog verliert **P** (3), wenn **O** mit a(n) antworten kann!
- Im rechten Zweig (2r) greift **O** die Behauptung **P** (1r) an, **P** muss mit einem Angriff auf **O** (2r) antworten und verliert, wenn er für das von **O** gewählte m nicht a(m) beweisen kann!

Allgemeingültigkeit: Beispiele

0			$\bigwedge_x \neg\neg a(x) \to \neg\neg \bigwedge_x a(x)$	
1	$\bigwedge_x \neg\neg a(x)$		? n	$\neg\neg \bigwedge_x a(x)$
2	$\neg\neg a(n)$	$\neg \bigwedge_x a(x)$	$\neg a(n)$	$\bigwedge_x a(x)$
3	$a(n)$	? m	?	$a(m)$
4		?		

- Dieser Satz ist nicht allgemeingültig, sondern nur dann wahr, wenn auf inhaltliche Aspekte zurückgegriffen werden kann: **P** würde nur dann sicher gewinnen, wenn er entweder ein n kennt, so dass **O** nicht a(n) beweisen kann oder wenn er selbst a(m) für jedes m beweisen kann. Diese Kenntnis kann er aber nur aufgrund des Inhalts von a(x) haben; er kann den Dialog nicht allein aufgrund der Form der Behauptung gewinnen.

Logisches Schließen

- Vorverständnis: Man setzt einen oder mehrere Sätze voraus und schließt ("folgert") daraus einen weiteren Satz.
    - Die Einführung eines Wahrheitsbegriffs war dadurch motiviert, dass mit seiner Hilfe eine Art Minimalbedingung für korrektes logisches Schließen formuliert wurde.
- Wie kann das allgemeine Muster

  "**Aus A (und B und ...) 'folgt' T** "

  im Rahmen der dialogischen Logikbegründung gefaßt werden?

Logisches Schließen

- Ansatz:
  - Alle vorausgesetzten Sätze werden als Hypothesen auf die Seite von **O** geschrieben und
  - dann verlangt, dass **P** den gefolgerten Satz dadurch verteidigen kann, dass ihm erlaubt wird, diese Hypothesen mitzubenutzen, d.h.: er darf sie angreifen.

  →**Hypothesendialoge als erweiterte Dialoge**.

Logisches Schließen: Hypothesendialoge

- **Anfangsstellung** eines Hypothesendialogs:

$$
\begin{array}{c|c}
A & \\
B & \\
\vdots & T \\
\hline
\text{(Angriff)} & \ldots
\end{array}
$$

- Forderung: Es soll ein Zusammenhang bestehen zwischen den Voraussetzungen und dem gefolgerten Satz.
(Grundlegende Idee des logischen Folgerns)

- Zusammenhang herstellen: **P** soll nicht nur **erlaubt** werden, die Hypothesen anzugreifen, sondern es wird verlangt, dass die erfolgreiche Verteidigung der **Konklusion** diese Angriffe auf die Hypothesen (**Prämissen**) auch **benötigt**.

Logisches Schließen: Hypothesendialoge

- Beispiel: Aus "Enrico singt eine Arie" folgt "Enrico singt".
  - Die Begründung, niemand könne eine Arie singen ohne zugleich zu singen, greift auf die Hypothese zurück. Aber...
  - hier: Durch Weglassen des (grammatischen) Akkusativobjekts wird wieder ein korrekter Satz gebildet.
  - Dies ist aber kein logischer, sondern ein **grammatischer** oder **semantischer Schluss**, weil zur Begründung nicht eine logische Regel, sondern ein grammatischer oder semantischer Zusammenhang benutzt wird.
- Weitere Präzisierung der Bedingung, dass **P** auf die Hypothesen des **O** "zurückgreifen" soll:
  Er soll den Dialog deshalb gewinnen, weil er die Hypothesen – oder Teilaussagen daraus – **übernimmt**.

Logisches Schließen: Hypothesendialoge

- Beispiel:

0	Es regnet oder es schneit		Es schneit oder es regnet	
1	?		...	
2	Es regnet	Es schneit	?0	
3			[Es regnet](↑1)	[Es schneit](↑1)
4	†	†	√	√

- Die neue Bedingung hat dazu geführt, dass **P** nicht einfach so gewinnt, sondern sogar eine formale Gewinnstrategie gefunden hat: Egal, welche Verteidigung **O** wählt, **P** kann sie übernehmen.
- Also: Was ein logischer Schluss (genau: "Schlussschema") ist, formuliert man am besten von vorneherein für Aussageschemata.

Logischer Schluss

- **Definition**: Ein **logischer Schluss** von einer Reihe von **Prämissen** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf eine **Konklusion** B liegt vor, wenn **P** für den Hypothesendialog um die Anfangsstellung

$$
\begin{array}{c|c}
A_1 & \\
A_2 & \\
\vdots & \\
A_n & B \\
\hline
 &
\end{array}
$$

  eine formale Gewinnstrategie besitzt.

- Kurznotation: $A_1, A_2, \ldots, A_n \prec B$
  Das Zeichen $\prec$ wird gelesen als "**impliziert**" und ist **kein neuer Junktor**, sondern ein **metalogisches** Zeichen.

- **Implikation** (anstelle von "Schluss", "Folgerung") ist eine **Relation zwischen Aussageschemata** – keine Verknüpfung.

Implikationen: Beispiele

1. $A \wedge B \prec A$

Die Gültigkeit zeigt die folgende Strategie für den zugehörigen Hypothesendialog:

0	$A \wedge B$	A
1	?	...
2	A	L?
3		$[A](2)$ $(\uparrow 1)$

Nach demselben Muster ist auch $A \wedge B \prec B$ zu begründen.

Implikationen: Beispiele

2. $A \vee B, \neg A \prec B$

0	$A \vee B$	
1	$\neg A$	B
2	?1	...
3	A | B	?0
4	– | †	[A] ?1 | [B] (↑2)
5	†	√

3. $(A \vee B) \to C \prec A \to C$

0	$(A \vee B) \to C$	$A \to C$
1	A ?	...
2	...	$A \vee B$?0
3	?2	[A]
4	C (↑2)	[C] (↑1)
5	†	√

O erhält wegen der ersten Prämisse (Adjunktion) ein Wahlrecht und **P** muss auf jede Wahl reagieren können.

Analog: $A \vee B, \neg B \prec A$

Implikationen: Beispiele

4. $A, A \rightarrow B \prec B$
("modus ponens", MP)

0	A	
1	$A \rightarrow B$	B
2	?	...
3	B	[A] ?1
4	†	[B] (↑2)
5		√

5. $\neg B, A \rightarrow B \prec \neg A$
("modus tollens", MT)

0	$\neg B$	
1	$A \rightarrow B$	$\neg A$
2	A ?	–
3	B	[A] ?1
4	–	[B] ?0
5	†	√

Implikationen: Beispiele

6. $A \rightarrow B \prec \neg B \rightarrow \neg A$ ("**Kontraposition**")

0	$A \rightarrow B$	$\neg B \rightarrow \neg A$
1	$\neg B$?	$\neg A$
2	A ?	–
3	B	[A] ?0
4	–	[B] ?1
5	†	√

Hinweis: Anwendungsbeispiel Autoreparatur (Inhetveen, S. 75)

Implikationen: Beispiele

7. $A \vee \neg A,\ B \vee \neg B,\ \neg(A \wedge B) \prec \neg A \vee \neg B$
Eine "klassische" Implikation wird durch Hinzunahme von tnd-Hypothesen (0), (1) effektiv verteidigt.

0	$A \vee \neg A$					
1	$B \vee \neg B$					
2	$\neg(A \wedge B)$			$\neg A \vee \neg B$		
3	?			...		
4	A		$\neg A$	?0		
5	B	$\neg B$		?1		$[\neg A]$ ($\uparrow$3)
6	-		A ?5	$(A \wedge B)$?2	$[\neg B]$ ($\uparrow$3)	-
7	L? 6	B ?6	-	[A] (4)	-	[A] (6) ?4
8	R? 6	-	†	[B] (5)	[B] (5)	√
9	†	†		√	√	

Implikationen: Beispiele

- noch Beispiel 7:
  - Hätte man die beiden tnd-Hypothesen (0), (1) nicht zur Verfügung, gelingt die Angabe einer Gewinnstrategie nur unter Verletzung der LDF-Regel:
  - **P** verteidigt sich in (4) gegen den Angriff auf (1), aber der in (4) letzte Angriff von **O** steht in (3); die LDF-Regel hätte verlangt, sich zuerst auf diesen Angriff zu verteidigen.

0	$\neg(A \wedge B)$		$\neg A \vee \neg B$	
1	?		...	
2	-		$A \wedge B$?0	
3	L ?2	R ?2	...	...
4			$\neg A(\uparrow 1)$	$\neg B(\uparrow 1)$
5	A ?4	B ?4	–	–
6	†	†	[A] ($\uparrow$3)	[B] ($\uparrow$3)

Implikationen: Beispiele

8. $\neg A \wedge \neg B \prec \neg(A \vee B)$

0	$\neg A \wedge \neg B$		$\neg(A \vee B)$	
1	$A \vee B$?		-	
2	A	B	?1	
3	$\neg A$	$\neg B$	L?0	R?0
4	-	-	[A] ?	[B] ?
5	†	†	√	√

9. $A \rightarrow (B \wedge C) \prec A \rightarrow B$

0	$A \rightarrow (B \wedge C)$	$A \rightarrow B$
1	A ?	...
2	$B \wedge C$	[A] ?
3	B	L?
4	†	[B] (↑1)

Implikationen: Beispiele

10. $A \vee \neg A,\ B \vee \neg B,\ A \to \neg B \prec\ B \to \neg\, A$

Mit Zusatzvoraussetzungen (tnd-Hypothesen wie in Bsp. 7) erhält man einen einfachen Spezialfall der Kontraposition.

0	$A \vee \neg A$							
1	$B \vee \neg B$							
2	$A \to \neg B$				$B \to \neg A$			
3	B ?				$\neg A$			
4	A ?				-			
5	A		$\neg A$		?0			
6	B	$\neg B$	B	$\neg B$	?1		?1	
7	$\neg B$	-	$\neg B$	-	[A] ?2	[B] ?6	[A] ?2	[B] ?6
8	-		-		[B] ?7		[B] ?6	
9	†				√			

Implikationen: Beispiele

11. $\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) \prec \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$

0	$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y)$	$\bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$
1	y_0 ?	...
2	$\bigwedge_y A(x_0,y)$	?0
3	$A(x_0,y_0)$	y_0 ?2
4		$\bigvee_x A(x,y_0)$ ($\uparrow$1)
5	?	$[A(x_0,y_0)]$
6	†	√

Anmerkung: "Every man loves some woman"

Implikationen: Beispiele

12. $\bigwedge_x (A(x) \rightarrow B(x)), A(x_0) \prec B(x_0)$

"Subsumtions–Schluss":
Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch.
Also: Sokrates ist sterblich.

0	$\bigwedge_x (A(x) \rightarrow B(x))$	
1	$A(x_0)$	$B(x_0)$
2	?	...
3	$A(x_0) \rightarrow B(x_0)$	x_0 ?0
4	$B(x_0)$	$[A(x_0)]$?3
5	†	$[B(x_0)]$ ($\uparrow$2)

Implikationen: Beispiele

13. $\bigwedge_x(A(x) \to B(x)), \bigwedge_y(B(y) \to C(y)) \prec \bigwedge_z(A(z) \to C(z))$

Syllogismus "Modus Barbara"

Alle Philosophen sind Menschen.

Alle Menschen sind sterblich.

Also: Alle Philosophen sind sterblich.

0	$\bigwedge_x(A(x) \to B(x))$	
1	$\bigwedge_y(B(y) \to C(y))$	$\bigwedge_z(A(z) \to C(z))$
2	z_0 ?1	$A(z_0) \to C(z_0)$
3	$A(z_0)$?2	...
4	$A(z_0) \to B(z_0)$	z_0 ?0
5	$B(z_0)$	$[A(z_0)]$?4
6	$B(z_0) \to C(z_0)$	z_0 ?1
7	$C(z_0)$	$[B(z_0)]$?6
8	†	$[C(z_0)]$ ($\uparrow$3)

Implikationen: Beispiele

14. $\bigvee_x P(x) \prec \neg\bigwedge_x \neg P(x)$

0	$\bigvee_x P(x)$	$\neg\bigwedge_x \neg P(x)$
1	$\bigwedge_x \neg P(x)$	-
2	$P(x_0)$	?0
3	$\neg P(x_0)$	x_0 ?1
4	-	$[P(x_0)]$?3
5	†	√

Übung: Gilt auch $\neg\bigwedge_x \neg P(x) \prec \bigvee_x P(x)$?

Implikationen: Satz

Zusammenhang zwischen gültigen Implikationen und allgemeingültigen Aussageschemata:

- **Satz**: Die Implikation $A_1, A_2, \ldots, A_n \prec B$ ist genau dann gültig, wenn das Aussageschema $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ allgemeingültig ist.
- Zum Beweis:
  Der zur Implikation gehörende Hypothesendialog beginnt mit einer Stellung, die auch beim Dialog um die Subjunktion erreicht wird, nachdem **O** die links vom Subjunktor stehende Konjunktion übernommen und **P** dann nach allen vorkommenden Konjunktionsgliedern gefragt hat.

Implikationen

Damit können obige Beispiele für allgemeingültige Aussageschemata, die Subjunktionen waren, als Implikationen reformuliert werden:

(1) $A \prec A$

(3) $A \wedge \neg A \prec \neg A$

(4) $A \wedge \neg A \prec B$

(5) $A, A \rightarrow B \prec B$

(6) $A \vee B, \neg A \prec B$

Logisches Schließen

- ...soll immer dann, wenn die Prämissen wahr sind, auch auf wahre Konklusionen führen.
    - Wird dies durch unsere Definition erfüllt?
    - Betrachte eine gültige Implikation des einfachsten Typs A $\prec$ B
        - Ihre Gültigkeit bedeutet, dass der Hypothesendialog um die entsprechende Anfangsstellung **formal** gewinnbar ist.
        - Die weitere Voraussetzung, dass die Prämisse A wahr ist, bedeutet, dass es für den Dialog um A eine Gewinnstrategie gibt.

Logisches Schließen

- **O** soll diese Strategie im obigen Hypothesendialog kennen und nutzen, d.h. er verliert nicht schon deshalb, weil er bereits nach einem Gegenangriff von **P** auf sein A in (2) aufgeben muss, ohne dass es zum Nachholen der in (1) aufgeschobenen Verteidigung von B kommt.
- B ist material wahr, weil **P** eine Gewinnstrategie besitzt, indem er zuerst die materiale Wahrheit von A zeigt und aus diesem Beweis von A dann nach dem Schema einen Beweis von B konstruiert.

0	A	B
1	?	...
2	C_1	?0
	⋮	⋮
n	C_k	[B]($\uparrow$1)

Der Nutzen des logischen Schließens

zeigt sich

- in den Anwendungen in vielen Fachwissenschaften, insbesondere der Mathematik, der Informatik, der Physik, der Jurisprudenz und vielen anderen;
- in der Befähigung zur Kritik;
- in der Möglichkeit, "verborgenes" Wissen explizit zu machen.

Formale Dialoge: Entwicklungskalkül

Formale Logik :

- Übergang von Dialogspielen zu formalen Entwicklungen
- Was sind die Regeln für Gewinnstrategien?
  $\Longrightarrow$ ***Entwicklungsschritte***, abgeleitet aus den Partikelregeln
- Damit ergibt sich ein Tableaux-**Kalkül**: Entwicklungskalkül zur Herstellung von Gewinnstellungen
  (vgl. Kap. 7, Kalküle; die Regeln des Gentzenschen Sequenzenkalküls (G3, s. dort ESK) werden in umgekehrter Richtung gelesen!)
- Dessen Regeln (Übergänge von Stellungen zu Folgestellungen) sind auf der nächsten Seite zusammengestellt.

Bezeichne Σ die von Opponenten bisher gesetzten Aussagen; kommt eine Aussage A in Σ vor, so sei dies durch $\Sigma[A]$ verdeutlicht.

$$\begin{array}{c||l} \Sigma & A \wedge B \\ & A \mid B \end{array} \qquad \begin{array}{c||l} \Sigma[A \wedge B] & C \\ A & \end{array} \qquad \begin{array}{c||l} \Sigma[A \wedge B] & C \\ B & \end{array}$$

$$\begin{array}{c||l} \Sigma & \bigwedge_x A(x) \\ & A(n) \text{ f.a. } n \end{array} \qquad \begin{array}{c||l} \Sigma[\bigwedge_x A(x)] & C \\ A(n) & \end{array}$$

$$\begin{array}{c||l} \Sigma & A \vee B \\ & A \end{array} \qquad \begin{array}{c||l} \Sigma & A \vee B \\ & B \end{array} \qquad \begin{array}{c||l} \Sigma[A \vee B] & C \\ A \mid B & \end{array}$$

$$\begin{array}{c||l} \Sigma & \bigvee_x A(x) \\ & A(n) \end{array} \qquad \begin{array}{c||c} \Sigma[\bigvee_x A(x)] & C \\ A(n) & \text{f.a. } n \end{array}$$

$$\begin{array}{c||l} \Sigma & \neg A \\ A & \bot \end{array} \qquad \begin{array}{c||c} \Sigma[\neg A] & C \\ & A \end{array}$$

$$\begin{array}{c||l} \Sigma & A \to B \\ A & B \end{array} \qquad \begin{array}{c||c} \Sigma[A \to B] & C \\ \mid B & A \mid \end{array}$$

Formale Dialoge: Entwicklungskalkül

- Hinweis: Σ und C dürfen dabei auch leer sein, so dass in diesen Fällen auf Seiten von **O** und **P** gar kein Argument steht.

- Ein Zweig, der eine Primformel a als Links- **und** Rechtsformel enthält, heisst **formal-abgeschlossen**.
- Entsteht bei der systematischen Entwicklung eine in **allen** Zweigen formal-abgeschlossene Entwicklung, so ist die Ausgangsstellung verteidigbar, also **formal wahr (allgemeingültig)**.

- Alles Weitere s. Kap. 7, Kalküle (ESK); vgl. auch Smullyan 1971.

Dialogic:

Erlanger

Implementation

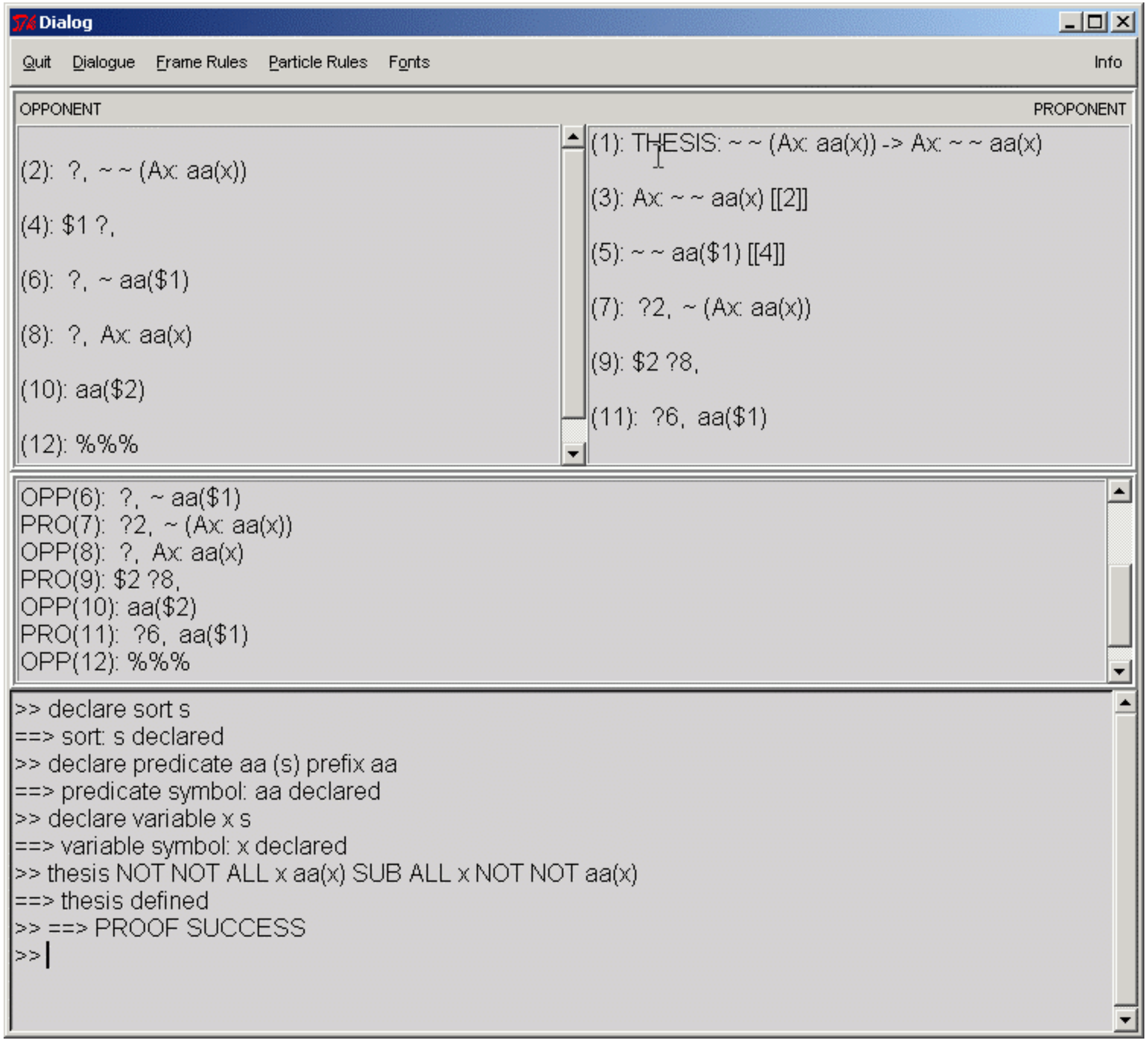
(Ehrensberger,

Zinn; Inf.8)

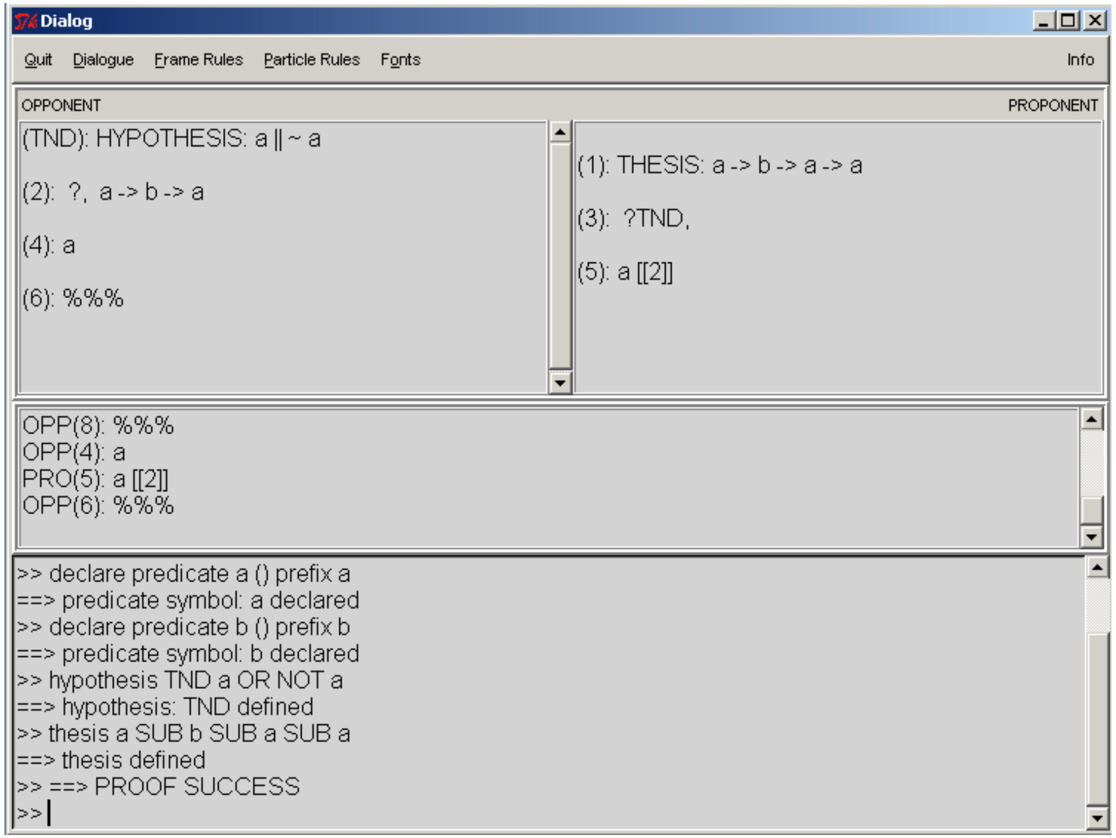
Dialog- und

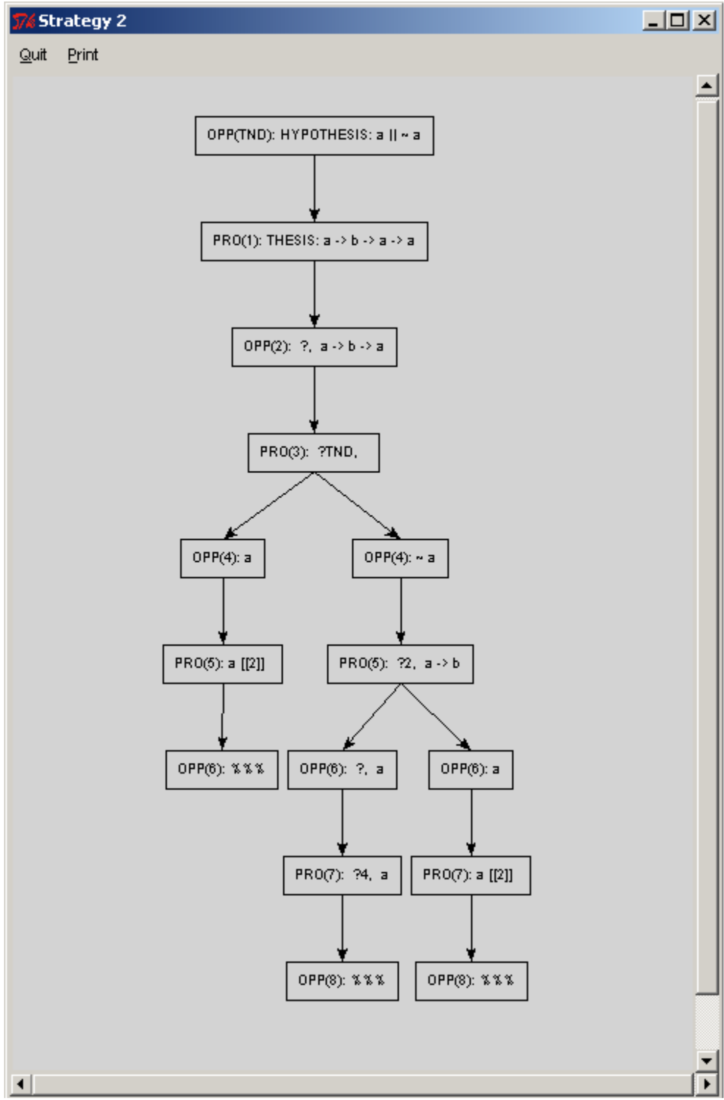
automatischer

Modus



Dialogic: Beispiel Peirce-Formel





COLOSSEUM (Zinn, Inf.8)

Start Colosseum over the Web

Input Theory (list of hypotheses)

Hypothesis 1

Hypothesis 2

Hypothesis 3

Input Theorem to be proved (the thesis)

Thesis

Attack Limit: (1) (2) (3) (4)

Time ressource (in seconds): (3) (10) (60) (200)

Graphic or text: (graphics) (text)

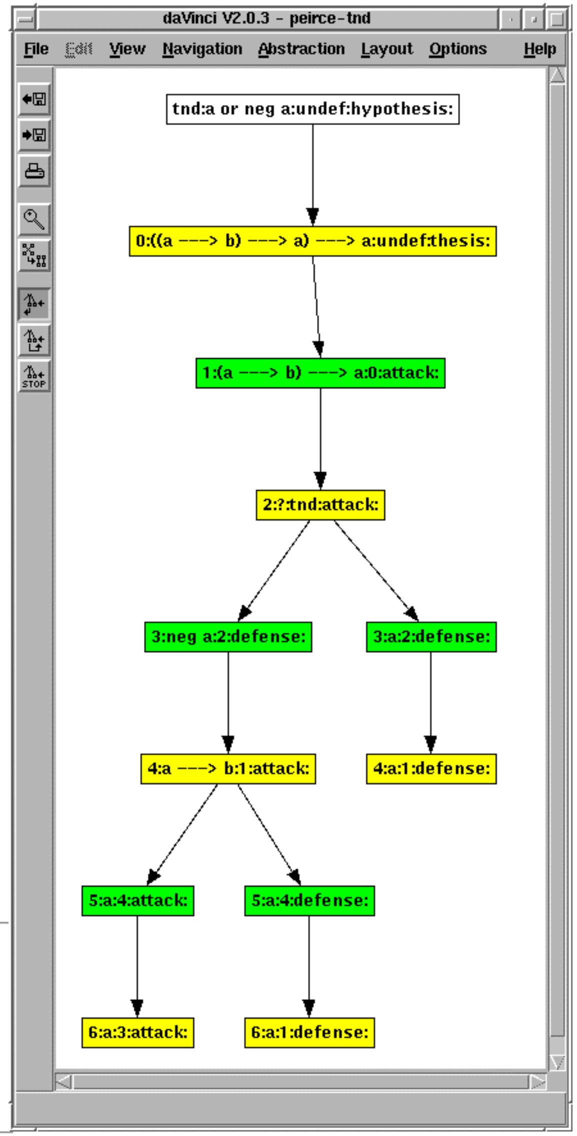
Submit Clear

Experimental version: please respect the syntax for the input formulae !

Example (The Peirce Formula)

- Hypothesis: a or neg a
- Thesis: ((a ---> b) ---> a) ---> a

Note, that Colosseum is an automated theorem prover for *intuitionistic* first order logic. The Peirce Formula is not valid without the hypothesis, Tertium Non Datur.



COLOSSEUM: Neue Ausgabe (Martin Gropp)

Start Colosseum over the Web

Please use *lower case* characters!

Input theorem to be proved (the thesis)

Thesis: ((a ---> b) ---> a) --->

Input theory (list of hypotheses)

H_1: a or neg a

H_2:

H_3:

Options

Attack limit: 2

Output format: HTML

Submit | Clear

Syntax

Traditional	Colosseum
$\neg A$	not a
$A \wedge B$	a and b
$A \vee B$	a or b
$A \rightarrow B$	a ---> b
$A \leftrightarrow B$	a <--> b

Colosseum

Taktik: t_simple_iter
Angriffs-Limit: 2

H_1	$(a \vee \neg a)$	
0		$(((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a)$
1	$((a \rightarrow b) \rightarrow a)$?	
2		? (H_1)
3	$\neg a$	
4		$(a \rightarrow b)$? (1)
5	a ?	
6		a ? (3)

H_1	$(a \vee \neg a)$	
0		$(((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a)$
1	$((a \rightarrow b) \rightarrow a)$?	
2		? (H_1)
3	$\neg a$	
4		$(a \rightarrow b)$? (1)
5	a	
6		a (1)

H_1	$(a \vee \neg a)$	
0		$(((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a)$
1	$((a \rightarrow b) \rightarrow a)$?	
2		? (H_1)
3	a	