Kapitel 03:
Relationen und Mengen

Grundlage: Inhetveen,

Logik - Eine dialog-orientierte Einführung, Kapitel 4 & 7.1

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Department Informatik

Ausblick: Kapitel 03

- **Lernziele**:
  - Was sind Relationen?
    (grundlegend für die Logikprogrammierung und für Datenbanken)
  - Was bedeutet Abstraktion?
    (zentral für die Informatik)
  - Was ist die logische Basis für Mengen?
    (Grundlagen der Mathematik)

Inhalt

- Relationen
    - Relationenprodukte
- Gleichheit und Abstraktion
- Kennzeichnungen
- Mengen

Relationen

- Art von Elementaraussagen, die zwei oder mehr Eigennamen (**Nominatoren**) zur korrekten Bildung erfordern.
- **Beispiele**:
    - Hänsel und Gretel sind Geschwister.
    - Wittgenstein war Schüler von Russell.
    - "Winnetou" ist spannender als die "Principia mathematica".
    - Frege ist der Autor der "Begriffsschrift".
    - Erlangen liegt zwischen Nürnberg und Bamberg.
    - 5 verhält sich zu 7 wie 15 zu 21.

Relationen

- **Ersetzen** wir die Eigennamen durch **Variablen**, so gelangen wir zu mehrstelligen Aussageformen, die man auch **Relationen** nennt:
  - geschwister(x1, x2) : zweistellige Relation
  - schüler_von(x1, x2) : zweistellige Relation
  - liegt_zwischen(x1, x2, x3) : dreistellige Relation
  - etc.
- **Schema** einer zweistelligen Relation: R(x,y)
  - Jeder Vergleich benutzt eine solche Relation:
    - höher_als, besser_als, ...
  - räumliche und zeitliche Beziehungen,
  - Verwandtschaftsbeziehungen, etc.

Relationen

- Relationen haben unterschiedliche Eigenschaften, z.B.:
  - **Vertauschbarkeit** der Argumente
    - "Fürth liegt neben Nürnberg." - Vertauschen **möglich**
    - "Abaelard lebte vor Frege." - Vertauschen **nicht möglich**
- **Definition**: Eine zweistellige Relation R(x,y) heißt **symmetrisch**, wenn für sie gilt:

$$\Lambda_x \Lambda_y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$

- Vertauschung der Argumente bei **nicht** symmetrischen Relationen möglich?

Relationen

- Vertauschung alltagssprachlich: **neue Wörter** bzw. Ausdrücke für die Relation mit den vertauschten Argumenten, z.B.
  - "Xanthippe war die Gattin des Sokrates." – "Sokrates war der Gatte der Xanthippe."
  - "Romeo liebte Julia." – "Julia wurde von Romeo geliebt."
  - "München liegt südlich von Nürnberg." – "Nürnberg liegt nördlich von München."
- **Definition**: Die zu einer zweistelligen Relation R(x,y) gehörige **konverse** (auch: inverse) Relation $\tilde{R}(x,y)$ ist definiert durch:

$$\Lambda_x \Lambda_y \tilde{R}(x,y) \rightleftharpoons R(y,x) \qquad \text{(Definitionszeichen: } \rightleftharpoons \text{)}$$

Relationen

- **Bisubjunktor** als neuer Junktor zur Abkürzung: $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \rightleftharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- Mit obiger Definition sind die **symmetrischen Relationen** gerade diejenigen, die mit ihren konversen "**zusammenfallen**":

$$R(x,y) \text{ ist symmetrisch } \leftrightarrow (R(x,y) \leftrightarrow \tilde{R}(x,y))$$

- **Aus der Definition folgt**:
  Die zweimalige Bildung der Konversen liefert wieder die Ausgangsrelation:

$$\tilde{\tilde{R}}(x,y) = R(x,y)$$

Relationen

- Bei Relationen, die die Definition der symmetrischen Relation **nicht** erfüllen, sind **zwei Fälle** zu unterscheiden:
  1. Die Vertauschung der Argumente im einer wahren Relationsaussage führt zu einer **falschen**, z.B.
     - "Aristoteles war Schüler von Platon."
       ist wahr, die Umkehrung falsch
     - "Nürnberg liegt nördlich von München."

Relationen

2. Manchmal führt die Vertauschung der Argumente zu **Unsinn** oder zu einer Relationsaussage, von der **nicht** schon **feststeht**, ob sie wahr oder falsch ist, z.B.
   - "Frege ist Autor der Begriffsschrift." ist wahr,
     "Die Begriffschrift ist Autor von Frege." ist Unsinn.
   - Wenn "Romeo liebt Julia." wahr ist, ist über "Julia liebt Romeo." noch gar nichts gesagt.
   - Wenn "Peter ist Bruder von Helge." wahr ist, kann "Helge ist Bruder von Peter." wahr sein, wenn Helge männlich ist...

Relationen

- Für Relationen der **ersten** Art gibt es die Bezeichnung:
- **Definition**: Eine Relation R(x,y) heißt **asymmetrisch**, wenn gilt:

$$\Lambda_x \Lambda_y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$$

- Mit der Definition der konversen Relationen (F. 7) ergibt sich unmittelbar:

$$R(x,y) \text{ ist asymmetrisch, dann gilt : } (R(x,y) \rightarrow \neg \tilde{R}(x,y))$$

- **Definition**: Eine Relation R(x,y) heißt **antisymmetrisch**, wenn gilt:

$$\Lambda_x \Lambda_y (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y)$$

Relationen: Relationenprodukte

- **Idee**: Einführung "neuer" Relationen durch Zurückführung auf schon bekannte.
  - **Beispiel**: "**Vatersvater**" für "Großvater väterlicherseits" lässt erkennen, dass zu einem Verständnis von "Großvater von" im Prinzip genügt, die **Relation** "Vater von" verstanden zu haben.
  - **Zusammensetzung**: "Peter ist Großvater väterlicherseits von Paul" trifft zu, wenn Peter einen Sohn hat, der **zugleich** Vater von Paul ist:

$$V_x(\text{vater\_von}(\text{Peter}, x) \wedge \text{vater\_von}(x, \text{Paul}))$$

- Zur Bildung von **Relationenprodukten** nehmen wir **zwei** (**zweistellige**) **Relationen** und binden in ihrer Konjunktion je eine Variable jeder Relation durch einen gemeinsamen Existenzquantor. Beachte Reihenfolge der Argumente!

Relationen: Relationenprodukte

- **Definition**: Seien $R(x_1, x_2)$ und $S(x_3, x_4)$ zwei Relationen. Das **(2,3)-Produkt von R und S** wird definiert als die zweistellige Relation:

$$R\ {}_2\odot_3\ S(x_1,x_4) \rightleftharpoons \bigvee_z (R(x_1,z) \wedge S(z,x_4))$$

(analog werden die drei anderen kombinatorisch möglichen Produkte definiert)

- Für den **Spezialfall R = S**, also das (2,3)-Produkt von R mit sich selbst, schreibt man auch kurz $\mathbf{R^2}$
- Weil das Relationenprodukt mit einer Konjunktion definiert und das Aussageschema **allgemeingültig** ist, gilt der
- **Satz**: Das Relationenprodukt ist **schwach kommutativ**, d.h.

$$R\ {}_2\odot_3\ S(x,y) = S\ {}_1\odot_4\ R(y,x)$$

Relationen: Relationenprodukte

- **Satz**: Das Relationenprodukt ist **assoziativ**:

$$(R\odot S)\odot T = R\odot(S\odot T)$$

  - deshalb kann man bei mehrfachen Produkten die Klammern weglassen.
  - Auch die allgemeine Potenzschreibweise ist eindeutig.
- **Satz** (**Konversionsregel**): $\widetilde{R\odot S} = \widetilde{S}\odot\widetilde{R}$
  - **Beweis**:

$$\begin{aligned} \widetilde{R\odot S} &= R\odot S(y,x) \\ &= \bigvee_z (R(y,z) \wedge S(z,x)) \\ &= \bigvee_z (\widetilde{R}(z,y) \wedge \widetilde{S}(x,z)) \\ &= \bigvee_z (\widetilde{S}(x,z) \wedge \widetilde{R}(z,y)) \\ &= \widetilde{S}\odot\widetilde{R}(x,y) \end{aligned}$$

Relationen: Relationenprodukte

- **Satz** (**Konversionsregel**): $\widetilde{R \odot S} = \tilde{S} \odot \tilde{R}$
  - **Beweis**:

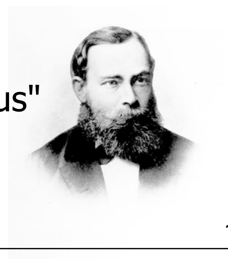
$$\begin{aligned}
\widetilde{R \odot S} &= R \odot S(y,x) \\
&= \bigvee_z (R(y,z) \wedge S(z,x)) \\
&= \bigvee_z (\tilde{R}(z,y) \wedge \tilde{S}(x,z)) \\
&= \bigvee_z (\tilde{S}(x,z) \wedge \tilde{R}(z,y)) \\
&= \tilde{S} \odot \tilde{R}(x,y)
\end{aligned}$$

- Damit kann man leicht zeigen, dass das Produkt einer Relation mit ihrer Konversen immer eine symmetrische Relation ist:

$$\widetilde{R \odot \tilde{R}} = \tilde{\tilde{R}} \odot \tilde{R} = R \odot \tilde{R}$$

Gleichheit und Abstraktion

- Leibniz (1646–1716):
  "Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren"
  - Zwei Namen (Nominatoren) benennen **denselben Gegenstand**, wenn sie in jedem wahren Satz, der sie enthält, füreinander eingesetzt werden können, **ohne** dass sich an der **Wahrheit** des Satzes etwas **ändert**. (falsch wird)
  - D.h.: Zwei Gegenstände A, B sind **identisch**, wenn es **keinen Satz** gibt, mit dem sie sich **unterscheiden** lassen, der also für A zutrifft und für B nicht.
- Frege (1848–1925):
  - **Beispiel** "Morgenstern" – "Abendstern" – "Venus"



Gleichheit und Abstraktion

- **Definition**: **Identität**

  $A \equiv B \rightleftharpoons \Lambda_P(P(A) \leftrightarrow P(B))$

  - Hier wird über eine Variable für Aussagen **P** quantifiziert: **indefiniter** Quantor! (zweite Stufe, „second order")

- **Eigenschaften der Identität:**
  - **Reflexivität**: $A \equiv A$
  - **Symmetrie**: $A \equiv B \leftrightarrow B \equiv A$
    - folgt direkt aus Definition mit Symmetrie der Konjunktion $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
  - **Transitivität**: $(A \equiv B \wedge B \equiv C) \rightarrow A \equiv C$

Gleichheit und Abstraktion

- **Definition**: Eine zweistellige Relation **xRy** heißt **Äquivalenzrelation**, wenn gilt:

1. Reflexivität $\Lambda_x xRx$
2. Symmetrie $\Lambda_x \Lambda_y\, xRy \rightarrow yRx$
3. Transitivität $\Lambda_x \Lambda_y \Lambda_z (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$

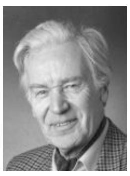
- Die **Identität** ist also eine **Äquivalenzrelation** ("gleichwertig")

Gleichheit und Abstraktion

- Weitere **Beispiele** für **Äquivalenzrelationen**:
  - die zwischen Wörtern einer Sprache erklärte Relation der **Synonymie**,
  - die in der euklidischen Geometrie zwischen Geraden erklärte Relation der **Parallelität**,
  - die **zwischen Aussagen** erklärte Relation $A \leftrightarrow B$ ("Sachverhaltsgleichheit").

Gleichheit und Abstraktion

- Äquivalenzrelation: **Gegenbeispiele**
  - Die zwischen **Wörtern** einer Sprache erklärte Relation der (orthographischen) **Verschiedenheit**: nicht reflexiv;
  - Die in der euklidischen Geometrie zwischen **Geraden** erklärte Relation der **Orthogonalität**: weder reflexiv noch transitiv;
  - Die zwischen **Menschen** erklärte Relation, **Zeitgenosse** zu sein: nicht transitiv;
  - Die zwischen Aussagen erklärte Relation der **Implikation** $A \prec B$: nicht (immer) symmetrisch.
- Äquivalenzrelation ist Basis für den Grundbegriff der **Abstraktion**
  - Einführung nach Frege und Paul Lorenzen (1915–1994)



Abstraktion

- Sei ein Vorrat an **Dingen** gegeben, zwischen denen eine **Äquivalenzrelation** erklärt ist; Notation: **x~y**
- Besteht die Relation zwischen zwei der Dinge a, b, so sollen diese **in gewisser Hinsicht gleich** sein – **nicht identisch**, aber eine gleiche, explizit benennbare **Eigenschaftsausprägung** besitzen:

$$\tilde{a} = \tilde{b} \rightleftharpoons a \sim b$$

- Für diese Gleichheit gilt aber eine **abgeschwächte** Form des (Leibnizschen) **Identitätsprinzips** ...
- **Definition**: Ist ~ eine Äquivalenzrelation und P(x) eine Aussageform, so heißt P **invariant bzgl.** ~ (kurz: ~ -invariant), wenn gilt:

$$\bigwedge_a \bigwedge_b (a \sim b \rightarrow (P(a) \leftrightarrow P(b)))$$

Abstraktion

- **Bem.**: Aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt, dass sie in beiden Argumenten ~-invariant ist.
- Mit der Einschränkung auf ~-invariante Aussageformen gilt:

$$\tilde{a} = \tilde{b} \leftrightarrow \bigwedge_P (P \sim\text{-invariant} \rightarrow (P(a) \leftrightarrow P(b)))$$

- Wir erhalten für die neuen "Gegenstände" $\tilde{a}, \tilde{b}$ ein **modifiziertes** Identitätsprinzip – damit können wir überhaupt von "Gegenständen" sprechen ("... als ob ...": Abstrakta sind **fiktiv**, nicht konkret).

Abstraktion

- **Beispiel**: Marktsituation.
  - Äquivalenzrelation: Gleichheit bzgl. des (**Tausch**-) **Werts**.
  - Dieser Wert ist ein **abstrakter Gegenstand**, der von einem konkreten Gegenstand **repräsentiert** wird (ohne den es ihn gar nicht gibt).
  - **Unter allen** konkreten Gegenständen mit dem **gleichen** Wert kann **jeder** als Repräsentant gewählt werden.
  - In dieser Weise von Werten zu sprechen heißt, weiterhin von **konkreten** Waren zu sprechen, allerdings eingeschränkt auf solche Aussagen, die bzgl. ihrer **Austauschbarkeit invariant** sind.
  - Ein Wort wie "Wert" heißt in dieser Verwendung **Abstraktor**

Abstraktion

- **Abstraktoren** spielen eine fundamentale Rolle in den Wissenschaften und insbesondere in der Informatik (und auch in der Alltagssprache...):
  - **Zahl, Funktion, Begriff, Sachverhalt**, ... lassen sich als Abstraktoren rekonstruieren.
- **Vollständige Rekonstruktion**:
  1. **Identifikation** der konkreten Gegenstände, die den abstrakten Gegenstand repräsentieren;
  2. Angabe einer **Äquivalenzrelation**, bezüglich der **invariant** geredet wird.
  3. Überprüfung, ob das als Abstraktor zu rekonstruierende Wort im jeweiligen **Kontext** eine solche **invariante Verwendung** anzeigt.
- Abstraktion ist ein **logischer** Prozess des invarianten Redens, d.h. eine **Operation mit Aussagen**, und nicht ein irgendwie psychologisch zu erklärendes Verfahren.

Abstraktion

- **Beispiel**: "5 ist eine Primzahl." ↔ "Die Zahl 5 ist prim."
- Die Rede von Zahlen soll als **abstrakte** Rede rekonstruiert werden, d.h. "Zahl" ist ein **Abstraktor,** der auf eine **invariante Rede** hinweist.
- **Repräsentanten**: Zahlen wurden zum Zählen erfunden, also z.B. **Strichlisten**; diese können benannt werden (Schritt 1).
- Um welche Äquivalenzrelation geht es bei der invarianten Rede?
    - Operational definierte Relation "gleichlang": **Längenvergleich** durch simultanes Abhaken – dazu muss man nicht zählen! (Schritt 2)
    - **Prädikator** "unzerlegbar" (prim) auf folgende Weise: Jede Strichliste kann in **Teillisten** zerlegt werden.

Abstraktion

Dabei trivial, so dass
(**a**) jeder Teil nur **einen** Strich enthält, oder

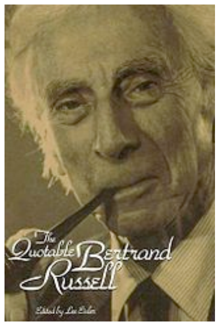
(**b**) in nur **einen Teil**, der die Gesamtliste enthält.
Ein Strichliste heißt **unzerlegbar**, wenn sie nicht anders als trivial in Teillisten zerlegt werden kann, die paarweise **gleichlang** sind.

- **Unzerlegbarkeit** einer Strichliste ist **invariant** bzgl. Äquivalenzrelation **gleichlang** (Schritt 3).
Beispiel: IIIII (5); Gegenbeispiele: IIIIII (6), IIIIIIIII (9)
- Benennung der Strichlisten... Zahlwörter und Zahlenzeichen

- Das Zählzeichen IIIII (5) und jede dazu gleichlange Strichliste ist **unzerlegbar**.
- "Die Zahl 5 ist prim": als **abstrakter Satz** über Zählzeichen rekonstruiert.

Kennzeichnungen

- Heterogene Verwendungsarten des **bestimmten Artikels**:
- Der Mensch ... ; Die Sonne ... ; Das Reden ... ; Das Rot ... ; Das Gute ... ; Das Gesagte ... ; Das Jetzt ... ; Das Woher ... ; Das Nichts ...
- Bertrand Russell (1872–1970): "Descriptions"
  Mit dem **bestimmten Artikel** gebildete Ausdrücke, sofern sie in einem Satz an der **Stelle eines Namens** stehen, sind so zu ersetzen, dass der neu gebildete Ausdruck sich als **Ausgangsbehauptung** verstehen lässt...



Kennzeichnungen

- **Beispiele**:
- "Der Autor des Tractatus logico-philosophicus starb 1951 in Cambridge."
  Zutreffende Behauptung, da es einen Text mit diesem Titel gibt und da sein Autor Ludwig Wittgenstein ist.
- "Der Autor der Antigone war Grieche."
  Nicht korrekt, da der mit dem bestimmten Artikel gebildete Ausdruck nicht auf **genau einen** Gegenstand verweist.
  (Es gibt mehrere Werke mit dem Titel)

Kennzeichnungen

- Auszeichnung eines bestimmten Gebrauchs des **bestimmten Artikels**:
  - **Existenz** und **Eindeutigkeit** als Bedingungen an eine korrekt gebildete Aussage, die einen mit dem **bestimmten Artikel** gebildeten Ausdruck an der Stelle eines Namens (**Nominator**) enthält.
- **Notation**: $\iota_x P(x)$ "Dasjenige x mit der Eigenschaft P(x)"
- Russells Vorschlag:

$$A(\iota_x P(x)) \rightleftharpoons \bigvee_x (P(x) \wedge A(x) \wedge (\bigwedge_y P(y) \rightarrow y = x))$$

1. Existenz
2. Erfüllung der Aussageform A(y)
3. Eindeutigkeit

Mengen

- In der modernen Mathematik wird der Begriff "**Menge**" als sog. **undefinierter Grundbegriff** benutzt, ebenso die Relation "**Element_von**".
  Beispiel: $[0,1] = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$
  Motivation erfolgt zumeist mittels:
- "**Naive Mengenlehre**"
  - geht zurück auf Georg Cantor (1845–1918):
    Eine Menge ist "eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen" (1877)
  - führt zu **Antinomien** (Russell)
  - später: "Axiomatisierungen" (insbesondere ZFC nach Zermelo-Fraenkel), die jedoch Logik voraussetzen!
    (s. Artikel "Set Theory" in der "Stanford Encyclopedia of Philosophy")
- Die Rede von Mengen läßt sich mit unseren logischen Hilfsmitteln leicht auf eine **feste Basis** bringen.

Mengen

- **Definition**:
  Zwei Aussageformen A(x) und B(x) heißen **extensional gleich**, wenn jede zulässige Ersetzung von x beide erfüllt oder beide nicht erfüllt, kurz:

$$A(x) \cong B(x) \rightleftharpoons \bigwedge_x (A(x) \leftrightarrow B(x))$$

- Seien z.B. $A(x) \rightleftharpoons 0 \leq x \leq 1$ und $B(x) \rightleftharpoons 0 \leq x^3 \leq 1$
  Dann gilt: $A(x) \cong B(x)$
- Die extensionale Gleichheit ist eine **Äquivalenzrelation** (Übung)
- Daher: Einführung von **Menge** als Abstraktor, der auf eine bzgl. der extensionalen Gleichheit invariante Rede über **Aussageformen** hinweist.
- Notation: $\{ x \mid A(x) \}$ ("Operatorschreibweise": **{.|.}**)

Mengen

- **Definition**: Elementrelation $a \in \{x|A(x)\} \rightleftharpoons A(a)$
- Ist eine Aussageform unerfüllbar, so repräsentiert sie die **leere Menge**:

$$\emptyset \rightleftharpoons \{x|x \neq x\}$$

- **Definition**: (Standardoperationen mit Mengen)
  - **Durchschnitt**: $\{x|A(x)\} \cap \{x|B(x)\} \rightleftharpoons \{x|A(x) \wedge B(x)\}$
  - **Vereinigung**: $\{x|A(x)\} \cup \{x|B(x)\} \rightleftharpoons \{x|A(x) \vee B(x)\}$
  - **Komplement**: $\complement\{x|A(x)\} \rightleftharpoons \{x|\neg A(x)\}$
- **Definition**: Relation **Teilmenge_von**

$$\{x|A(x)\} \subseteq \{x|B(x)\} \rightleftharpoons \bigwedge_y (y \in \{x|A(x)\} \rightarrow y \in \{x|B(x)\})$$

  - d.h. $\{x|A(x)\} \subseteq \{x|B(x)\} \leftrightarrow \bigwedge_x (A(x) \rightarrow B(x))$

Mengen

- **Definition**: (weitere Operationen der "Mengenalgebra")
  - **Mengendifferenz**: $\{x|A(x)\} \setminus \{x|B(x)\} \rightleftharpoons \{x|A(x) \wedge \neg B(x)\}$
  - **Symmetrische Mengendifferenz**:
    $\{x|A(x)\} \Delta \{x|B(x)\} \rightleftharpoons (\{x|A(x)\} \setminus \{x|B(x)\}) \cup (\{x|B(x) \setminus \{x|A(x)\})$
  - **Mengengleichheit**: $\{x|A(x)\} = \{x|B(x)\} \leftrightarrow A(x) \cong B(x)$

- **Sätze** der Mengenalgebra:

  $\{x|A(x)\} \Delta \{x|A(x)\} = \emptyset$
  $\{x|A(x)\} \Delta \{x|B(x)\} = \{x|B(x)\} \Delta \{x|A(x)\}$
  $\{x|A(x)\} \Delta (\{x|B(x)\} \Delta \{x|C(x)\}) = (\{x|A(x)\} \Delta \{x|B(x)\}) \Delta \{x|C(x)\}$

- **Beweise**: Ergeben sich unmittelbar aus der Reformulierung in der Sprache der Logik (Übung!)

Mengen

- Die Beziehung zwischen einer Menge S = {x | A(x)} und der Aussage A(x) heißt auch "**Darstellung**": "A(x) stellt S dar".
- Die auf die vorgestellte Weise eingeführten Mengen heißen **prädikativ**;
  - **zuerst** werden die Aussagen gebildet, danach können **Mengenvariablen** für die durch diese Aussagen dargestellten Mengen eingeführt werden;
  - in A(x) dürfen Mengenvariablen vorkommen, allerdings sind dann ggf. Mengenvariablen einer **höheren Sprachschicht** einzuführen, um Antinomien zu vermeiden (Russellsche Antinomie).
- **Endliche Mengen**:
  Aufzählung von Gegenständen (Nominatoren) in **Listen** $a_1, a_2, ..., a_n$;
  die Äquivalenzrelation ist durch die Transformationen Entdopplung und Umordnung gegeben;
  die Anzahl bleibt dabei **invariant**.
  Daraus entstehen endliche Mengen durch **Abstraktion**.
  Statt $\{x \mid x=a_1 \vee x=a_2 \vee ... \vee x=a_n\}$
  schreibt man kurz auch $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.