Kapitel 02:
Quantoren

Grundlage: Inhetveen,

Logik - Eine dialog-orientierte Einführung, Kapitel 2

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Department Informatik

Überblick

- "Logikbaum"

- Dialogische Begründung (semantisch / pragmatisch)
  - Modelltheorie
    - Wahrheitswerte-Tafeln
    - Interpretations-semantik
  - Beweistheorie
    - Frege/Hilbert-Kalküle
    - Gentzen-Kalküle

Ausblick: Kapitel 02

- **Lernziele**:
    - Was sind Quantoren?
    - Welche Quantoren gibt es?
    - Wie führt man einen Dialog mit quantorenlogischen Aussagen?
    - Welche Software ist hilfreich beim Üben in der Logik?

Inhalt

- Einleitung
- Logische Variablen und Quantoren
- Beispiele
- Software
- Anhang: weiteres Beispiel (zur Nachbearbeitung)

Einleitung

- **Ausgangspunkt**:
    - Bisher bezogen sich Aussagen immer auf **konkrete**, **namentlich** angesprochene **Gegenstände**.
    - Wie können wir folgende Beispiele symbolisieren?
        - *Jeder* ist krank.
        - Es ist *nicht alles* Gold, was glänzt.
        - *Jeder* ist sich selbst der Nächste.
        - *Eine* Krähe hackt der *anderen* kein Auge aus.
        - *Nicht jedes* empirische Urteil ist auch korrekt.
    - Die bisherigen Symbolisierungstechniken sind **nicht geeignet**!

Logische Variablen und Quantoren

- Gottlob Frege, 1879: (Re-)Konstruktion solcher Sätze **aus Elementaraussagen**.
    - z.B.: "Peter ist krank"
    - Ersetzen des Eigennamens durch **Platzhalter**:
        - "x ist krank"
    - Ein Zeichen, das eine Stelle markiert, an der ein Eigenname **entfernt** wurde, heißt **freie Variable**.
    - Ein Ausdruck der dadurch entsteht, heißt (**Elementar**-) **Aussage*form***.
    - **Nutzen**: Die **Variablen** können wieder durch Eigennamen **ersetzt** werden.

Logische Variablen und Quantoren

- Im **Dialog**:
  - Wer soll das **Recht** haben, die **Ersetzung** vorzunehmen?
  - Zwei Möglichkeiten:
    - **O** darf einsetzen, wir schreiben:

      $\bigwedge_x$ x ist krank. "**Allquantor**"
    - **P** darf einsetzen:

      $\bigvee_x$ x ist krank. "**Existenzquantor**"
  - Definition (wieder) durch **Gebrauchsregeln** (wie bei den Junktoren)

Logische Variablen und Quantoren

Allquantor: **P verpflichtet** sich, **jede** Aussage zu behaupten, die entsteht, wenn **O** einen Namen für x auswählt.

0		$\bigwedge_x$ x ist krank
1	Maria ?	Maria ist krank

Existenzquantor: Es genügt, wenn **P einen** Eigennamen kennt, mit der er seine Behauptung verteidigen kann.

0		$\bigvee_x$ x ist krank
1	?	Peter ist krank

Logische Variablen und Quantoren

- **Anmerkungen** zu den Quantoren
  - Die Umgangssprache kennt viele quantoren-artige Wörter z.B. "einige", "die meisten", …
    - Die **Definition** durch die **Gebrauchsregeln** ist relevant
    - In der Logik heißt "einige" so viel wie "mindestens ein".
  - Es ist **nicht vorgeschrieben,** was eine gültige Namenswahl für x sein soll; x könnte auch "Der Satz des Pythagoras" sein
    Lösung:

$$\bigvee_x (x \text{ ist ein Mensch} \rightarrow x \text{ ist krank})$$

  - Der **Quantorenskopus** (Gültigkeitsbereich) bezieht sich auf die **gesamte Klammer**

Beispiele

- **Beispiel**: Es ist nicht alles Gold, was glänzt.

0		$\neg\Lambda_x$ (x glänzt $\rightarrow$ x ist Gold)
1	Λ_x (x glänzt $\rightarrow$ x ist Gold) ?	–
2	Perle42 glänzt $\rightarrow$ Perle42 ist (aus) Gold	Perle42
3	...	Perle42 glänzt
4	?	(Perle42 glänzt √)
5	Perle42 ist (aus) Gold (↑3)	?
6	†	√

Beispiele

- **P** gewinnt diesen Dialog – er weiß sogar vorher, dass er **jeden Dialog** um seine Behauptung **gewinnt**:
- P hat eine **Gewinnstrategie**
  - die darin besteht, einen Gegenstand zu kennen, der **glänzt** aber **nicht aus Gold** ist
  - **Er wählt** diesen Namen für den Gegenstand, sobald er in Z. 2 die Gelegenheit hat, den Allsatz des **O** anzugreifen

Beispiele

- **Beispiel**:
  - "Nur wer den Lehrstoff wirklich verstanden hat, kann gute Beispiele dazu angeben."
    - ist auch **nicht gegen jeden** Opponenten zu gewinnen
  - **Achtung** bei der Symbolisierung:
  - Die Paraphrase "Wenn man den Stoff verstanden hat, dann kann man gute Beispiele angeben":

    $$\Lambda_x(V(x) \rightarrow B(x))$$

    hat ein **Problem**:
    - Die **Pointe** von "nur" ist **verloren gegangen** – es ist nicht ausgeschlossen, dass man durch Auswendiglernen auch gute Beispiele nennen kann.

Beispiele

- **Beispiel**:
  - "Nur wer den Lehrstoff wirklich verstanden hat, kann gute Beispiele dazu angeben."
  - Um der **ursprünglichen Formulierung** gerecht zu werden, sollte man so **umformulieren**:
    "Wenn jemand gute Beispiele angeben kann, dann hat er den Stoff jedenfalls verstanden":

$$\Lambda_x (B(x) \rightarrow V(x))$$

- **Fazit**:
  - Gilt für zwei Aussagen A, B: $A \rightarrow B$, dann heißt A auch eine **hinreichende Bedingung** für B und B eine **notwendige Bedingung** für A.
  - Bei Sätzen des Typs "Nur wenn B, dann A."
    ist **B** die **notwendige Bedingung**, nicht die hinreichende.

Beispiele

- **Beispiel**:
  - "Wenn jede Wissenschaft lehrbar ist und es sich bei der Logik um eine Wissenschaft handelt, dann ist die Logik lehrbar."

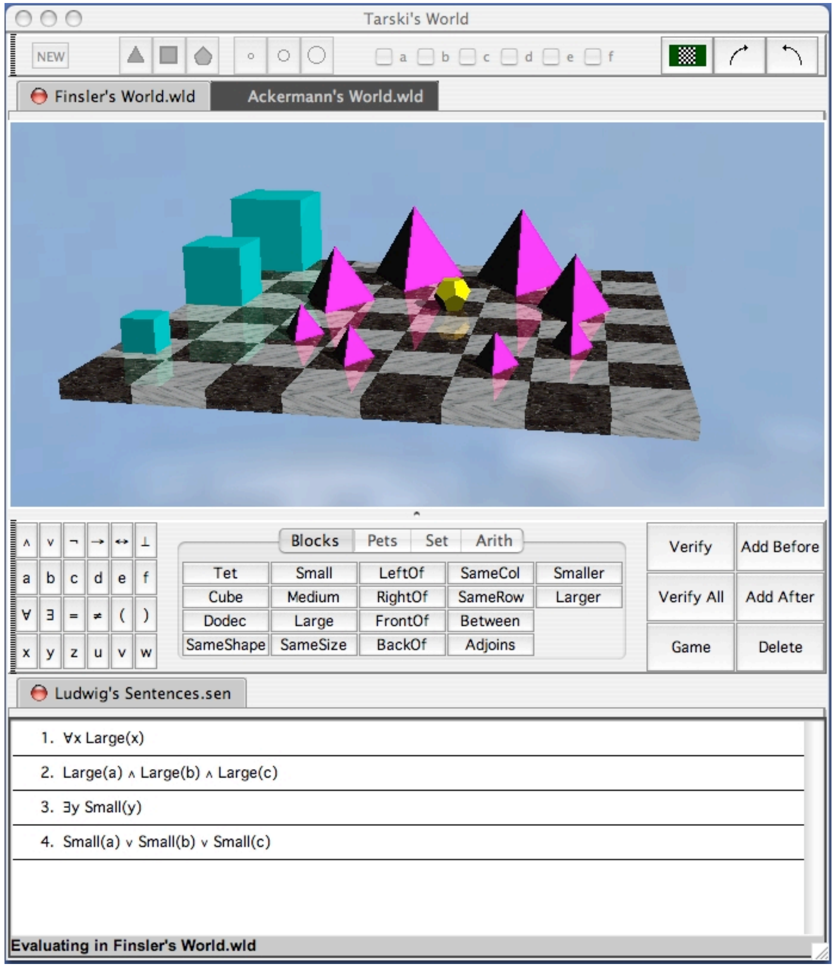
0		$(\bigwedge_x (W(x) \rightarrow L(x)) \wedge W(Logik)) \rightarrow L(Logik)$
1	$\bigwedge_x (W(x) \rightarrow L(x)) \wedge W(Logik)$?	...
2	W(Logik)	R ?
3	$\bigwedge_x (W(x) \rightarrow L(x))$	L ?
4	$W(Logik) \rightarrow L(Logik)$	Logik ?
5	...	W(Logik) ?
6	?	(W(Logik) √) (↑**O** (2))
7	L(Logik) (↑5)	
8	†	[L(Logik)] (↑1)
9		√

Beispiele

- **Abkürzungskonvention**: [W(Logik)] statt (W(Logik) √) (↑**O** (2)) für Behauptungen, die ein Dialogpartner vom anderen übernehmen kann und deshalb nicht mehr eigens begründen muss (s. Z. 8).
- **Deutlich**: es handelt sich hier wieder um eine **Gewinnstrategie**
- **Neu**: In Z. 6 macht **P** zur Begründung einer Behauptung davon Gebrauch, dass **O dieselbe** Behauptung vorher (Z. 2) **selber behauptet hat**. Dies ist aus folgendem Grund ein ausreichendes Argument:
  - **P** greife die Behauptung aus Z. 2 an. Wenn **O** diese nicht begründen kann, hat er **verloren**.
  - Wenn **O** sie begründen kann, holt **P** die jetzt fällige Verteidigung dadurch nach, dass er die Begründung einfach **übernimmt**.

Software

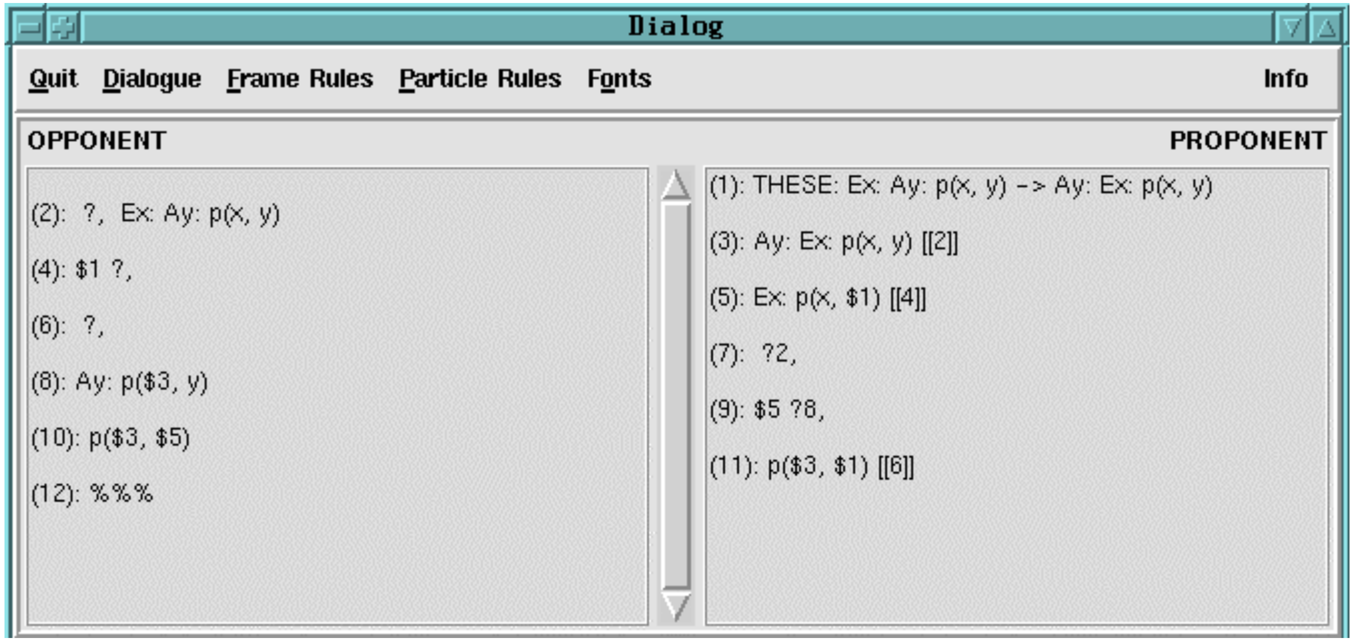
Tarski`s World [Barwise & Co., CSLI Stanford]

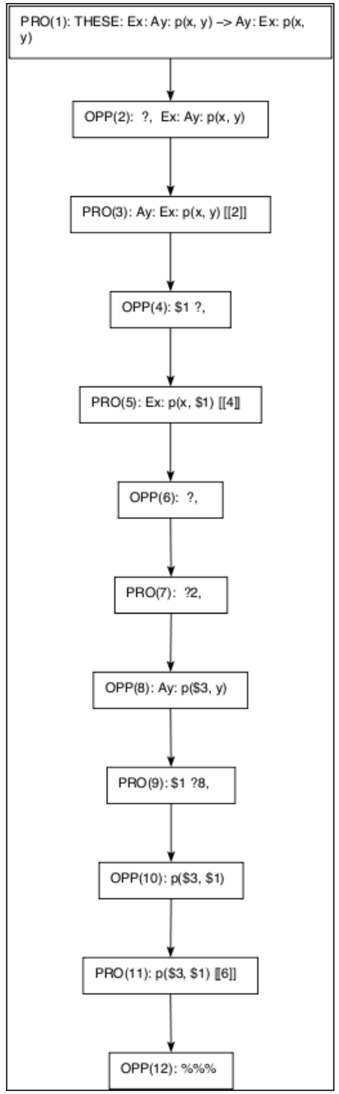


Software

DiaLogic

[Erlanger System zur dialogischen Logik]





Software

Colosseum

[Claus Zinn, früher: Inf.8, FAU Erlangen-Nürnberg]

Start Colosseum over the Web

Input Theory (list of hypotheses)

Hypothesis 1

Hypothesis 2

Hypothesis 3

Input Theorem to be proved (the thesis)

Thesis

Attack Limit: ○ (1) ◉ (2) ○ (3) ○ (4)

Time ressource (in seconds): ◉ (3) ○ (10) ○ (60) ○ (200)

Graphic or text: ◉ (graphics) ○ (text)

Submit Clear

Anhang: weiteres Beispiel

- **Beispiel**: Ein astronomischer Satz über Exnovae
  - "Wenn sich somit auch unter den Planetarischen Nebeln höchstwahrscheinlich Exnovae befinden, so kann die Ansicht anscheinend doch nicht dahin verallgemeinert werden, dass nun jede Exnova schließlich zu einem Planetarischen Nebel wird."
  - Auf den ersten Blick: Subjunktion
    Es ist aber nur eine **Konjunktion**:
    - Es wird **ohne weitere Voraussetzung** behauptet, dass nicht jede Exnova zu einem planetarischen Nebel wird. Der „Wenn-Teil" wird als Behauptung vorgestellt.
    - **Klarer wäre**: „Zwar befinden sich ..., aber das kann nicht ..."

Anhang: weiteres Beispiel

- **Symbolisierung:**
  - E(x) : x ist eine Exnova.
  - P(y) : y ist ein Planetarischer Nebel.
  - W(x,y) : x wird/wurde zu y.
- Die sprachlichen Einschränkungen "anscheinend", "höchstwahrscheinlich" werden vorerst ignoriert
- **Die erste Teilbehauptung besagt dann**:
  "Unter den Planetarischen Nebeln befinden sich Exnovae"
  soviel wie:
  "Es gibt (mindestens einen) Planetarische Nebel, die aus einer Exnova entstanden sind".

$$\bigvee_x(\bigvee_y(P(x)\wedge E(y)\wedge W(y,x))) \wedge \neg\bigwedge_y(E(y) \rightarrow \bigvee_x(P(x)\wedge W(y,x)))$$

Anhang: weiteres Beispiel

0		$\bigvee_x(\bigvee_y(P(x)\wedge E(y)\wedge W(y,x))) \wedge \neg\bigwedge_y(E(y) \rightarrow \bigvee_x(P(x)\wedge W(y,x)))$
1	L ?	$\bigvee_x(\bigvee_y(P(x)\wedge E(y)\wedge W(y,x)))$
2	?	$\bigvee_y(P(M1)\wedge E(y)\wedge W(y,M1)))$
3	?	$(P(M1)\wedge E(SN_{1054})\wedge W(SN_{1054},M1))$
4	L ?	$P(M1)$
5	?	$(P(M1)\ \surd)$
6	M (3)?	$E(SN_{1054})$
7	?	$(E(SN_{1054})\surd)$
8	R ?(3)	$W(SN_{1054},M1)$
9	?	$(W(SN_{1054},M1)\surd)$

- M1: Crab-Nebel; SN_{1054}: Supernova des Jahres 1054
- $W(SN_{1054},M1)$: M1 weist eine radiale Expansion auf, die, zurückgerechnet, auf ein sternartiges Objekt an der fraglichen Stelle führt.

Anhang: weiteres Beispiel

- **Fortsetzung**:

10	R ?(0)	$\neg \bigwedge_y (E(y) \to \bigvee_x (P(x) \wedge W(y,x)))$
11	$\bigwedge_y (E(y) \to \bigvee_x (P(x) \wedge W(y,x)))$?	–
12	$E(USco) \to \bigvee_x (P(x) \wedge W(USco,x))$	USco ?
13	...	E(USco) ?
14	?	(E(USco) √)
15	$\bigvee_x (P(x) \wedge W(USco,x))$ (↑13)	–
16	$P(USco) \wedge W(USco,USco)$	?
17	P(USco)	L ?
18	†	?
19		√

Anhang: weiteres Beispiel

- **Kommentar**:
  - Auf den **Angriff** in Z. 11 hat **P keine Verteidigung**, also **Gegenangriff** mit dem Namen eines Sterns (U Sco).
  - Nach Einsetzung **greift P** die linke Seite der Subjunktion **an. O schiebt** die entsprechende Verteidigung **auf** und greift die EA an, die **P verteidigen** möge.
  - In Z. 15 holt **O** seine **Verteidigung** nach, die **P** sofort angreift.
  - **O** meint, besonders schlau zu sein, indem er **denselben Namen** für x einsetzt, den er schon für y einsetzen musste – die rechte Teilbehauptung wird **trivial**.

Anhang: weiteres Beispiel

- **Kommentar**:
  - **P** fragt aber nach dem **linken** Konjunktionsglied in Z. 16, muss aber mangels Begründung **aufgeben**.
  - **P gewinnt**, hat aber deswegen noch **keine Gewinnstrategie**,
    - **O** hätte in Z. 15 auch einen **anderen Namen** aussuchen können, bei dem er bessere Gründe dafür hat, es sei jener Planetarische Nebel, zu dem sich U Sco einmal entwickeln wird.
      Bei U Sco ist dies nach heutigem Wissensstand eher unwahrscheinlich.