Fouriertransformation und Unschärfeprinzip

Information, Codierung, Komplexität 2
SS 2007

24. April 2007

Das berühmte Unschärfeprinzip von Heisenberg in der Quantentheorie beruht, rein mathematisch betrachtet, auf einer grundlegenden Eigenschaft der Fouriertransformation der Dichtefunktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Normalverteilungen stellen den Extremfall dar, in dem die Unschärfe-Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist.

Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy \\
&= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r\, dr\, d\phi \\
&= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi
\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration erhält man

Folgerung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Für $\alpha > 0$ ergibt sich mit Variablentransformation

Folgerung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^3}$$

Mittels quadratischer Ergänzung im Exponenten findet man für reelles ω

Folgerung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} e^{-i\omega x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$$

und das liefert die Fouriertransformierte der Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2:

Folgerung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

Wird die genannte Dichte mit

$$g(\sigma, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

bezeichnet, so gilt natürlich

Folgerung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma, x)\, dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot g(\sigma, x)\, dx = \sigma^2$$

und die Aussage über die Fouriertransformierte kann man so schreiben

Folgerung

$$\mathcal{F} g(\sigma, x) = g(1, \sigma \cdot \omega)$$

Eine ganz ähnliche Beziehung erhält man für die Fouriertransformierte der Quadratwurzel aus $g(\sigma, x)$:

$$\mathcal{F}\sqrt{g(\sigma,x)} = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\sigma^2\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2(\frac{1}{2\sigma})^2}}}$$

und das schreibt sich elegant so

Folgerung

$$\mathcal{F}\sqrt{g(\sigma,x)} = \sqrt{g(\frac{1}{2\sigma},\omega)}$$

d.h. $\left(\mathcal{F}\sqrt{g(\sigma,x)}\right)^2$ ist die Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz $1/(2\sigma)^2$.

Für integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird deren Fouriertransformierte $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

Definition

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot x} dx$$

Analog definiert man die konjugierte Transformation

Definition

$$(\mathcal{F}^* f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot x} dx$$

Offensichtlich ist $(\mathcal{F}f)^* = \mathcal{F}^* f^*$

Lemma

Für integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F} f)(s) \cdot g(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot (\mathcal{F} g)(s)\, ds$$

Ist f stetig und integrierbar und ist auch $\mathcal{F} f$ integrierbar, so gilt

Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F} f)(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot x} d\omega = (\mathcal{F}^*(\mathcal{F} f))(x)$$

d.h. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^*$ sind invers zueinander: $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$

Für integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die Faltung $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

Definition

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot g(y) dy$$

Eine ganz wichtige Eigenschaft der Fouriertransformation

Faltungstheorem

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$$

Bezüglich der Ableitung von Funktionen gilt

Ableitungsformel

$$D_\omega(\mathcal{F} f) = -i \cdot (\mathcal{F}[I_x f])$$
$$\mathcal{F}[D_x f] = i \cdot I_\omega \mathcal{F} f$$

wobei I_x = Multiplikation mit x, D_x = Ableitung nach x

Definition

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \text{Menge der integrierbaren Funktionen } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \text{Menge der quadrat-integrierbaren Funktionen}$$

Auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ definiert man ein “Skalarprodukt” und eine “Norm”

Definition

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)\,dx$$
$$\|f\|_2^2 := \langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx$$

NB: $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (modulo Nullfunktionen) ist ein separabler Hilbertraum

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2$$

Parseval-Plancherel-Identität

Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt

$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle = \langle f, g\rangle$ und insbesondere $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

Beweis:

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle = \int (\mathcal{F}f)^* \cdot (\mathcal{F}g) = \int (\mathcal{F}^* f^*) \cdot (\mathcal{F}g) = \int \mathcal{F}(\mathcal{F}^* f^*) \cdot g = \int f^* \cdot g$$

D.h.: die Fouriertransformation ist ein *unitärer* Operator auf dem Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Ist $f(x)$ eine "genügend gutartige" Funktion (alle beteiligten Integrale existieren und haben einen endlichen Wert), so gilt (partielle Integration!)

$$\int_{\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx}|f(x)|^2 dx = 2Re\langle I_x f, D_x f\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = -\|f\|_2^2$$

Für normierte Funktionen, d.h. $\|f\|_2 = 1$ gilt also

$$|Re\langle I_x f, D_x f\rangle| = \frac{1}{2}$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich

$$\|I_x f\|_2 \, \|D_x f\|_2 \geq |\langle I_x f, D_x f\rangle| \geq |Re\langle I_x f, D_x f\rangle| = \frac{1}{2}$$

und das bedeutet schliesslich

$$\|I_x f\|_2 \, \|I_\omega \mathcal{F} f\|_2 \geq \frac{1}{2}$$

Damit ist gezeigt

Unschärferelation der Fouriertransformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot |(\mathcal{F} f)(\omega)|^2 \, d\omega \geq \frac{1}{4}$$

für "geeignete" normierte Funktionen $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (für die z.B. auch $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt).

Interpretation: für $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ kann man

$$\rho_f : x \mapsto |f(x)|^2 = f(x)^* \cdot f(x)$$

als Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P_f auf $\mathbb{R}$ auffassen. Die Varianz dieser Verteilung ist natürlich

$$\mathrm{var}(P_f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx$$

Wegen Parseval-Plancherel ist $\|\mathcal{F}f\| = \|f\| = 1$, d.h. auch

$$\rho_{\mathcal{F}f} : \omega \mapsto |(\mathcal{F}f)(\omega)|^2 = (\mathcal{F}f)(\omega)^* \cdot (\mathcal{F}f)(\omega)$$

ist die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Q_f auf $\mathbb{R}$. Diese hat die Varianz

$$\mathrm{var}(Q_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot |(\mathcal{F}f)(\omega)|^2 \, d\omega$$

Varianz-Unschärfe für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$var(P_f) \cdot var(Q_f) \geq \frac{1}{4}$$

Dabei wird der Fall der Gleichheit für Normalverteilungen erreicht:

$$P_f = \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Q_f = \mathcal{N}(0, 1/(2\sigma^2))$$

und somit

$$var(P_f) \cdot var(Q_f) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{(2\sigma)^2} = \frac{1}{4}$$

(und das charakterisiert sogar die Normalverteilungen!)

Beachte: Fourier-transformiert wird nicht die Dichte ρ_f der Verteilung, sondern f, also im Fall der Normalverteilung die Quadratwurzel aus der Dichte!